

Introduction

L'objectif de ce cours intitulé « traitement du signal sur une ligne de transmission de l'information » est de vous faire découvrir et comprendre les différentes étapes de traitement par lesquelles passe le signal au niveau des équipements d'extrémité d'une ligne de transmission de l'information.

Ces équipements émetteurs et récepteurs du signal qui véhicule l'information, on les appelle des modems et vous les trouvez aujourd'hui typiquement dans les box ADSL.

Leurs performances ont évidemment contribué de façon importante à l'essor des réseaux informatiques et réseaux de télécommunications puisque c'est grâce à ces équipements que l'on atteint aujourd'hui les hauts débits d'information et que vous pouvez, entre autres, profiter d'une navigation sur l'internet fluide c'est à dire accéder à toutes sortes de contenus : sons, images, vidéos, textes, hypertexte (on parle de multimédia) ... tout cela quasi instantanément et sans interruptions, ceci y compris lorsque la propagation n'est pas guidée sur un câble mais même lorsque elle s'effectue librement, sans fils, via les ondes Hertziennes. Ligne de transmission est donc à prendre au sens large.

Bien que le cours s'adresse à des étudiants de niveau Master première année, tous les outils mathématiques indispensables seront introduits au fur et à mesure, des plus élémentaires aux plus avancés. Le cours est donc conçu pour être accessible même à des étudiants n'ayant plus fait de maths ou de physique depuis un bac scientifique obtenu parfois il y a bien longtemps, je pense notamment aux étudiants en formation continue.

Traitement du Signal sur une Ligne de Transmission de l'Information

F. Henry-Couannier

1) Introduction : liaison de transmission de l'information

2) Signaux et systèmes linéaires

- Signaux aléatoires, signaux déterministes
- Energie, puissance, distance et corrélation
- Réponse impulsionnelle et convolution

3) Analyse spectrale des signaux périodiques

- Séries de Fourier
- Représentations complexes

4) Analyse spectrale généralisée

- Transformation de Fourier
- Théorème de la convolution
- Spectre de puissance

5) Filtrage

- Filtres
- Détection optimale
- Egalisation

6) Echantillonnage (Shannon)

7) Modulation

- Modulation analogique
- Modulation numérique

8) Application : les modems

Plan du cours

Le programme sera le suivant :

- Nous commencerons par un survol d'un schéma général synoptique nous permettant d'identifier les principales étapes de la chaîne de traitements du signal. Ceci nous prendra quelques heures car nous serons tout de suite en mesure de présenter avec suffisamment de détails certaines de ces étapes sur lesquelles nous ne reviendrons plus par la suite telles que la quantification, ou les différents types de codage.
- J'introduirai ensuite progressivement les notions de traitement du signal indispensables pour aller plus loin : on distinguera les signaux dits déterministes des signaux aléatoires et on définira les grandeurs caractéristiques que l'on peut être amené à calculer pour chaque signal : sa moyenne, son énergie, sa puissance, sa fonction d'auto-corrélation...
- On commencera alors à se poser la question de comment comprendre et décrire les déformations subies par le signal électromagnétique au cours de sa propagation, en on y parviendra en introduisant la réponse impulsionnelle et le produit de convolution.
- On apprendra ensuite à décomposer un signal en composantes sinusoïdales de diverses fréquences , autrement dit à obtenir son spectre, grâce aux séries de Fourier pour les signaux périodiques et aux transformées de Fourier pour les signaux quelconques.
- Tout canal de propagation se comporte comme un filtre laissant se propager certaines fréquences de notre signal mieux que d'autres. Ce concept de filtre est très puissant pour comprendre et prédire comment le canal-filtre déforme nos signaux.
- Nous aurons alors à notre disposition tout ce dont nous avons besoin pour répondre aux questions suivantes :
 - A quelle fréquence faut il échantillonner un signal avant de l'émettre pour que le récepteur soit en mesure de reconstituer fidèlement le signal à partir de ses échantillons ?
 - Comment filtrer notre signal de manière à éliminer au maximum les parasites (le bruit) qui se sont superposés inévitablement à notre signal tout au long de sa propagation ?
 - Comment le récepteur peut il reconnaître avec la meilleure efficacité possible (avec le plus faible taux d'erreur) les symboles électriques représentant les Zéros et les Uns envoyés par l'émetteur ? Il faudra prendre en compte pour cela les déformations de ces symboles induites par leur propagation sur la ligne mais aussi le fait que s'ils se succèdent de très près dans le temps ils peuvent déborder les uns sur les autres : c'est le phénomène d'interférence inter-symboles.
- Nous finirons par présenter les différentes techniques de modulation : les modulations donnent à un signal des caractéristiques idéalement favorables à sa propagation sur une ligne donnée, pour qu'il parvienne jusqu'au récepteur en ayant perdu le moins possible de son énergie initiale, autrement dit la modulation permet de limiter autant que possible l'atténuation des symboles pour faciliter la bonne reconnaissance des Zéros et des Uns par le récepteur. Les modulations sont également très utiles pour faire du multiplexage c'est à dire permettre à différentes sources d'émettre sur un même canal, de se partager donc ce canal sans interférer les unes avec les autres en occupant des bandes de fréquences bien séparées.

Schéma général d'une liaison de transmission de l'information

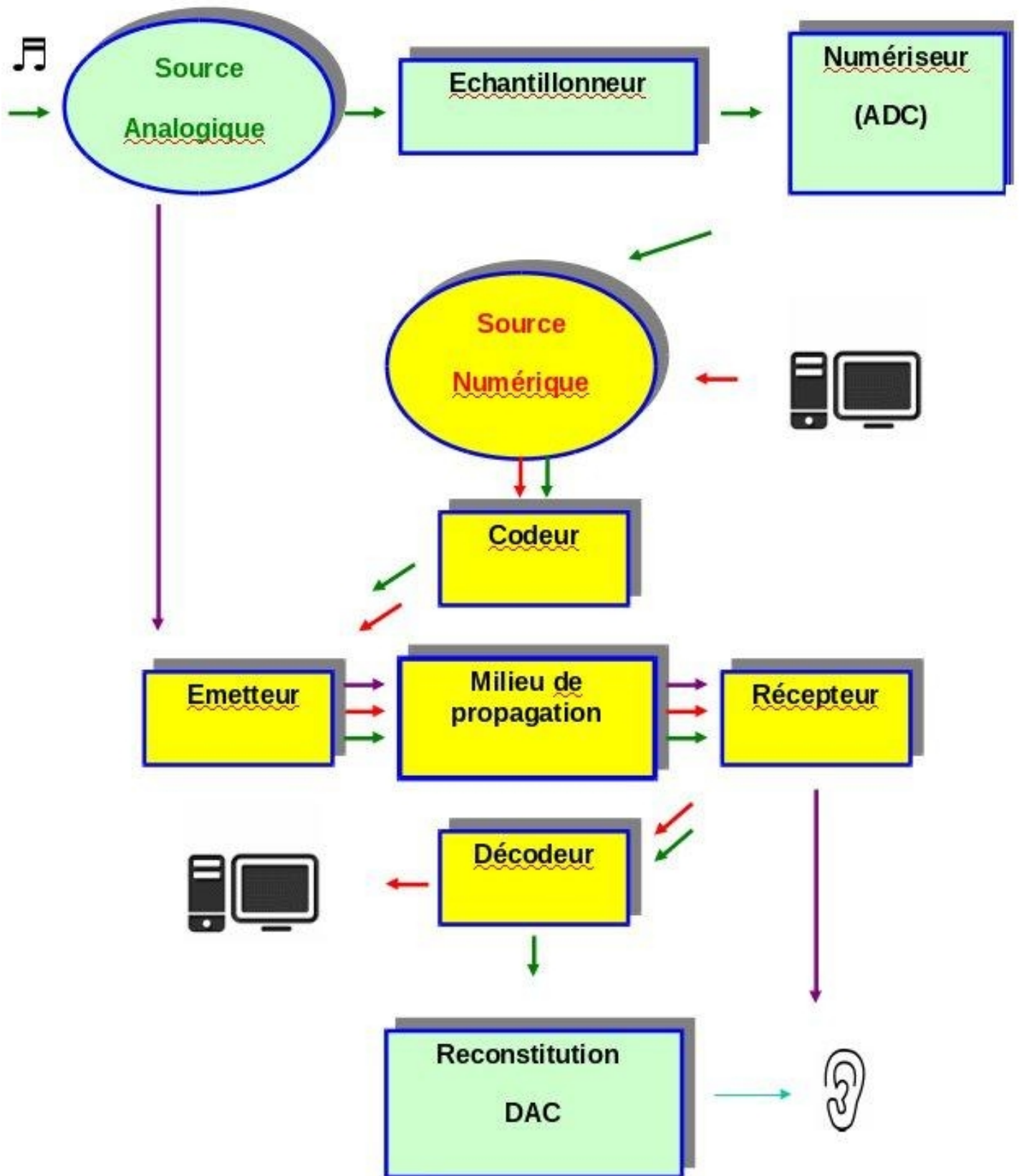


Schéma général d'une ligne de transmission de l'information

Le schéma général distingue les cheminements de trois types de signaux :

- Les signaux naturellement (nativement) numériques.
- Les signaux analogiques numérisés (transformés en signaux numériques) ce qui exige des étapes supplémentaires de conversion analogique-numérique symbolisées par les boîtes vertes.
- Les signaux analogiques transmis tels quels.

Il nous faut donc rappeler brièvement, car ce sont des notions familières pour la plupart d'entre vous, la définition des signaux numériques et analogiques.

- Toute grandeur physique, électrique ou mécanique par exemple, tant qu'elle n'a pas été mesurée est considérée comme **analogique**, c'est à dire **pouvant prendre n'importe quelle valeur à n'importe quel instant et variant de façon continue dans le temps** : d'un instant à un autre le signal analogique ne peut donc sauter directement d'une valeur à une autre sans être passé par toutes les valeurs intermédiaires correspondant à tous les instants intermédiaires. La pression des ondes acoustiques est un signal analogique qui peut être converti en signal électrique également analogique qui reproduit plus ou moins fidèlement les variations de la pression, grâce à un micro (piézoélectrique) et on pourrait envisager de moduler et d'émettre directement ce signal électrique sur notre canal de transmission pour qu'il soit démodulé par le récepteur puis reconverti dans la grandeur analogique initiale, la pression des ondes sonores. C'est le cheminement figurant en **violet** sur notre schéma général.

- Un signal numérique est comme son nom l'indique une simple suite de nombres. Les nombres que les circuits intégrés des ordinateurs connaissent et manipulent naturellement le plus efficacement sont le Zéro et le Un. Notre **signal numérique** sera donc **constitué d'une suite de Zéros et de Uns : les bits**. Certains types d'information à transmettre comme les fichiers de texte sont naturellement numériques, un code de 7 bits étant associé à chaque caractère de texte par le code ASCII par exemple.

Sur la liaison de transmission de l'information, les signaux naturellement numériques passent successivement par les étapes de Codage, Émission sous forme éventuellement Modulée, Propagation, détection des Zéros et des Uns incluant éventuellement une Démodulation par le récepteur, puis Décodage : c'est le cheminement figurant en **orange** sur notre schéma général.

Les signaux initialement analogiques, son, image fixe ou animée (vidéo) dont le cheminement figure en **vert**, doivent passer par deux étapes supplémentaires pour être **numérisés : Échantillonnage et Quantification** impliquant un traitement inverse au niveau du récepteur pour reconstituer le signal analogique originel.

Remarquons qu'à chaque bit sera associé une petite variation électrique ou optique, le symbole à émettre sur la ligne de transmission. Sa forme incluant éventuellement une modulation, petit bout de sinusoïde, devra être reconnue par le récepteur. Un signal initialement analogique est donc en définitive inévitablement à nouveau transmis sous forme analogique après numérisation puisque le symbole représentant chaque bit est une variation électrique ou optique continue ! Pourtant on n'a coutume de parler de transmission analogique du signal numérique que dans le cas où chaque symbole est modulé i.e se présente sous la forme d'un petit bout de sinusoïde.

Principe de la numérisation :

Numériser un signal physique c'est le transformer en une suite de nombres entiers c'est à dire tout simplement **mesurer le signal prélevé encore appelé échantillon à des intervalles de temps réguliers T_e** . Nous reviendrons sur la question du choix de cette période d'échantillonnage T_e ultérieurement lorsque nous aurons introduit les outils mathématiques nécessaires.

Même lorsque on mesure tout simplement la longueur d'un objet avec une règle graduée en millimètres, cette longueur à priori quelconque (analogique) est approximée par un nombre entier de millimètres : on remplace la valeur réelle par le nombre le plus proche appartenant à un ensemble de nombres permis à l'avance, de 0 à 200 mm pour un double décimètre. **La mesure lorsqu'elle s'effectue sur des échantillons est appelée quantification**. C'est ainsi que notre signal analogique à temps et valeur continues est donc en définitive devenu, après échantillonnage et quantification, un **signal numérisé à temps et valeurs discrètes**. Il ne reste plus qu'à convertir les nombres décimaux en binaire (cf Wikipedia pour ceux qui ont besoin de se rafraichir la mémoire) pour obtenir notre suite de Zéros et de Uns.

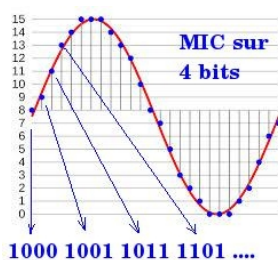
Intérêts de la numérisation :

- L'unification par le numérique : Une fois transformés en une suite de Uns et de Zéros **tous les types d'information peuvent être transmis, stockés ou de façon plus générale traités de la même façon**.

- Les symboles des signaux numérisés représentant les Zéros et les Uns sont, tout comme les signaux transmis sous leur forme analogique initiale, soumis aux perturbations extérieures et distorsions lors de leur propagation, mais le récepteur n'a plus besoin de retrouver la forme initiale exacte du symbole émis dans ce cas : il lui **suffit de savoir distinguer le symbole Zéro du symbole Un**, ce qu'il fait avec une probabilité d'erreur très faible. D'autre part, même lorsque une erreur se produit sur un bit appartenant à un groupe de bits liés par un **codage**, des vérifications se basant sur les valeurs des bits voisins correctement transmis **permettent de détecter donc corriger cette erreur**. Des codages plus sophistiqués permettent même de corriger des erreurs affectant plusieurs bits du groupe nous évitant ainsi d'avoir à les retransmettre. La transmission des bits s'effectuant couramment à taux d'erreur infime (1 bit faux sur un milliard après corrections) et la reconstitution du signal analogique originel à partir des bits pouvant s'effectuer aussi fidèlement que l'on veut à condition d'y mettre le prix (fréquence d'échantillonnage et précision de la quantification), la restitution pourra même être parfaite au sens où les imperfections seront impossibles à déceler par nos sens !

Avec la baisse des prix des composants électroniques on comprend que nous soyons désormais à l'ère du tout numérique.

Exemples :



- La Modulation par Impulsion Codée (MIC) ou PCM en anglais: Pulse Code Modulation, est très utilisée en téléphonie mais aussi dans des formats audio sans compression comme le WAV. Attention : le terme de « modulation par impulsion » signifie ici échantillonnage, à distinguer de la modulation sinusoïdale que nous aborderons à la fin du cours.

Nous verrons par la suite comment un signal peut être « décomposé en fréquences ». Dans le cas de

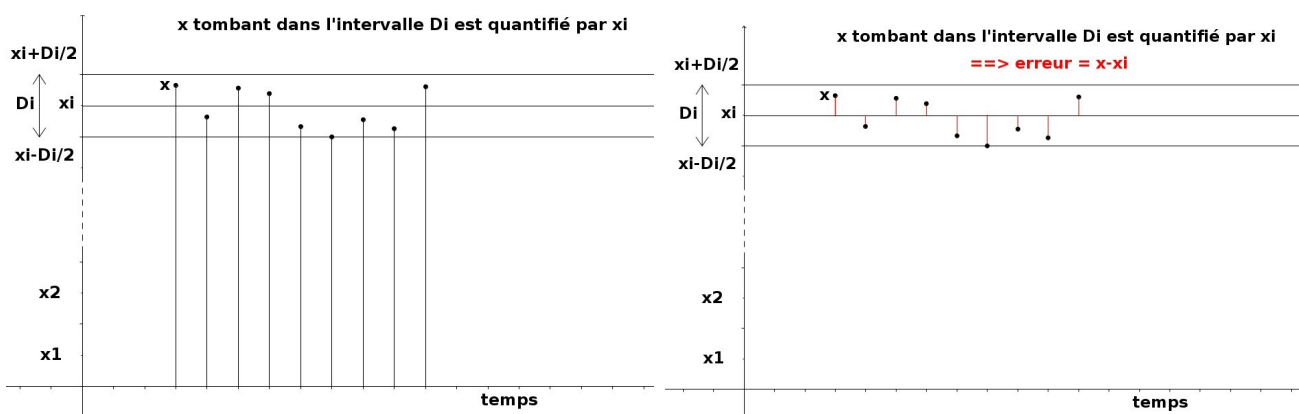
la voix à transmettre en téléphonie on peut se contenter de ne transmettre que les fréquences de la voix humaine inférieures à 4 kHz soit 4000 oscillations par seconde à comparer à 20kHz si l'on désirait un son de qualité HiFi (Haute Fidélité). Le nombre d'échantillons du signal de la voix qu'il convient de transmettre par seconde est donc, d'après un théorème que nous démontrerons ultérieurement, du double de 4kHz : 8000 échantillons par seconde. La valeur de chaque échantillon étant codée sur 8 bits (valeur comprise entre 0 et $2^8 - 1$), cela nous fait $8000 \times 8 = 64\text{kbits}$ à transmettre par seconde.

Valeur de référence à retenir : 1 voix téléphonique = 64kbits/s.

- On trouve couramment le son de qualité HiFi non compressé dans des fichiers au format WAV : deux canaux (stéréo) échantillonnés à 44.1kHz sur 16 bits. Cet échantillonnage est aussi celui des CDs et mp3 (compressé) mais on rencontre aussi du 48kHz pour le son associé à de la vidéo et 96kHz et au delà pour les pros ou application spécialisées dans le traitement du son.

- La transmission du signal vidéo HD non compressé (~ 1 million de pixels par image, 25 fois par seconde, couleur codée sur 24 bits) exige des débits bien supérieurs se comptant en dizaines de Mbits/s.

La quantification des échantillons



Pour quantifier il faut se donner N intervalles de quantification. L'intervalle numéro i étant de largeur D_i et centre x_i , $1 \leq i \leq N$, la quantification consiste à approximer l'échantillon analogique réel x qui tombe dans l'intervalle D_i par la valeur centrale x_i . On commet ainsi une erreur $x - x_i$ sur chaque échantillon quantifié. Tout se passe donc comme si on avait superposé à notre signal analogique initial une perturbation extérieure - ($x - x_i$) que l'on peut assimiler à un bruit indépendant : le bruit de quantification.

On a intérêt à minimiser ce bruit ce qui n'est possible qu'en réduisant les D_i donc en augmentant le nombre N de ces intervalles de plus en plus fins impliquant finalement de consommer un nombre de bits N_b accru puisque $N = 2^{N_b}$. Une meilleure quantification pour une meilleure qualité du signal transmis a donc un prix en terme de consommation de la capacité de transmission offerte par le canal !

L'importance du bruit de quantification moyen dans l'intervalle numéro i peut être estimée par la moyenne des $(x - x_i)^2$ que l'on note $B_{q_i} = \langle (x - x_i)^2 \rangle$ appelée puissance du bruit (une naïve moyenne des erreurs $x - x_i$ ne serait pas exploitable car tendrait à un résultat nul, les fluctuations positives compensant les fluctuations négatives). Nous devons donc tout de suite préciser comment nous comptons calculer des moyennes .

L'expérience simple de jet de dé met en évidence deux méthodes de calcul de la moyenne: soit l'on effectue l'expérience concrète qui consiste à jeter le dé un grand nombre de fois et à faire la moyenne temporelle de toutes les valeurs obtenues soit on exploite le fait que nous savons que toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître, $1/6$, pour prédire la moyenne statistique en

sommant toutes les valeurs possibles affectées du même poids de 1/6 ce qui nous donne $(1+2+3+4+5+6) \cdot 1/6 = 3,5$.

De même pour n'importe quel signal dont les valeurs à chaque instant vont être régies par les lois du hasard on peut calculer sa **moyenne temporelle à posteriori** si on a une réalisation temporelle $x(t)$ de ce signal ou sa **moyenne statistique à priori** à chaque instant en se basant sur notre connaissance de $p(x,t)$, probabilité que le signal prenne une valeur particulière x à l'instant t .

Dans le cas de notre échantillon à quantifier tombant dans l'intervalle D_i nous supposons que toutes les valeurs x ont la même probabilité de se produire dans cet intervalle. Comme pour le dé nous devons faire la somme de toutes les valeurs possibles affectées d'un poids qui est leur probabilité. Comme il n'y a plus seulement six mais une infinité de valeurs de x possibles entre $x_i - D_i/2$ et $x_i + D_i/2$, nous divisons par la pensée cet intervalle en une infinité de sous intervalles infiniment fins de largeur dx (dx tend donc vers zéro) et logiquement la probabilité que x tombe dans un de ces sous-intervalles est juste dx/D_i , la même pour tous puisqu'on a supposé toutes les valeurs équiprobables. Notre Bq_i moyen est donc la Somme continue (encore appelée intégrale \int au lieu de la somme discrète \sum que l'on a utilisée pour le dé, signal qui ne pouvait prendre qu'un ensemble fini (6) de valeurs discrètes) de tous les $(x-x_i)^2$ pondérés par leur probabilité dx/D_i pour x pris entre $x_i - D_i/2$ et $x_i + D_i/2$, que l'on note :

$$\int_{x_i - D_i/2}^{x_i + D_i/2} (x - x_i)^2 dx / D_i$$

Les techniques de calcul intégral ne sont pas supposées connues dans ce cours. Il vous suffit de savoir qu'une telle intégrale peut être calculée avec pour résultat $Bq_i = D_i^2/12$ qui confirme que réduire le bruit de quantification dans cet intervalle numéro i exigerait de réduire la largeur D_i .

Qu'en est il du bruit de quantification en prenant en compte tous les intervalles car n'oublions pas que l'échantillon x n'est pas obligé de se trouver dans l'intervalle numéro i que nous avons considéré jusqu'ici. Il nous faut donc faire une moyenne supplémentaire sur tous les Bq_i , moyenne de moyennes, donc somme des Bq_i pondérés par leur probabilité p_i que l'échantillon soit dans l'intervalle D_i :

$$Bq = \sum_i Bq_i p_i$$

Dans le cas où tous les intervalles ont la même largeur $D_i = D$, tous les Bq_i de cette somme sont égaux et valent $D^2/12$ qui peut être mis en facteur :

$$Bq = \sum_i Bq_i p_i = D^2/12 \sum_i p_i = D^2/12$$

La somme de toutes les probabilités vaut en effet toujours $1 = 100\%$: probabilité certaine pour x d'être dans un des intervalles si ceux-ci couvrent toute la dynamique, l'étendue totale des valeurs que peut prendre x .

Si l'on ne souhaite pas consommer plus de bits, N_b est fixé donc le nombre d'intervalles $N = 2^{N_b}$ aussi. Que peut on faire alors pour réduire Bq ? Nous avons pour l'instant supposé tous les **intervalles de largeurs égales : loi de quantification dite linéaire**. Envisager maintenant des intervalles de quantification de largeurs différentes est une voie intéressante. En effet, si l'on sait que notre signal occupe le plus souvent (probabilité grande p_u) une plage particulière de valeurs de largeur Δ_u , par exemple lorsque l'on parle normalement au téléphone et seulement exceptionnellement (probabilité faible p_e) d'autres plages de largeur Δ_e (chuchotements ou hurlements au téléphone), on peut diviser en deux parties les termes de la somme contribuant à Bq : $Bq_e p_e + Bq_u p_u$ et comme $p_u \gg p_e$ il est plus avantageux pour réduire Bq de travailler à réduire le Bq_u

(affecté d'un plus grand poids p_u) que le Bq_e autrement dit, on a intérêt à avoir des intervalles de quantification beaucoup plus fins et nombreux dans la zone plus probable Δ_u que dans la zone moins probable Δ_e . On parle de quantification non uniforme ou non linéaire.

Avoir des intervalles de quantification plus fins dans une zone de grande probabilité de présence du signal comme Δ_u tend à diminuer la probabilité pour l'échantillon de signal de tomber dans chacun de ces intervalles. L'effet est inverse dans les zones de faible probabilité où les intervalles de quantification s'élargissent pour y augmenter la probabilité de présence de l'échantillon. La loi de quantification non uniforme dans ce cas tend donc à rééquilibrer les probabilités de présence du signal dans les divers intervalles. Remarquons qu'à l'extrême, le fait d'avoir équiprobabilité de tous les intervalles de quantification pourrait être intéressant si notre souhait était de maximiser le débit d'information au sens de la théorie de l'information*.

En pratique, ce qui compte souvent plus que Bq dans l'absolu est le rapport puissance du signal sur puissance du bruit de quantification attendu pour un tel signal, $S/Bq(S)$ pour différentes puissances S du signal. Il importe de maintenir ce rapport constant en téléphonie par exemple pour une réception d'égale qualité que le signal soit faible ou fort sur une bonne partie de la bande utile Δ_u . On souhaite donc dans ce cas que $Bq(S)$ diminue lorsque S faiblit pour que $S/Bq(S)$ demeure constant et que les voix faibles puissent aussi être entendues distinctement. On adopte donc dans ce cas des intervalles plus nombreux et plus fins pour les faibles valeurs de S puis s'élargissant et devenant moins nombreux lorsque S augmente suivant une loi Logarithmique très utilisée en téléphonie (loi A en Europe, loi μ aux USA).

L'analyse de la courbe de la loi A permet d'illustrer tout ce que nous venons d'expliquer. La courbe représente en ordonnées, le rapport $S/Bq(S)$ en fonction du rapport $N_r = S/S_{max}$ en abscisses en échelles logarithmiques (+10dB signifie multiplication par un facteur 10 entre deux graduations voisines). S_{max} est la puissance correspondant au signal maximal toléré au delà duquel ($S/S_{max} = 1$ correspond à 0 décibels en échelle logarithmique) x est remplacé par la plus grande valeur autorisée x_N , faisant commettre une erreur qui croit indéfiniment avec x .

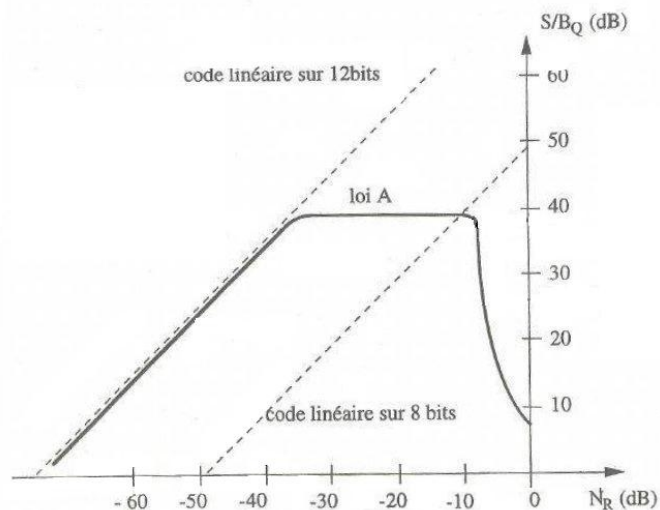


Illustration non réaliste montrant les intervalles de quantification variant dans la plage où S/Bq est constant

$Bq(S)$ explose donc pour les signaux dont la puissance approche S_{max} . N'oublions pas en effet que cette puissance est une moyenne et si elle approche S_{max} cela signifie que x tombe alors de plus en plus souvent au-delà de x_N . $S/Bq(S)$ s'effondre donc : le signal sature. Qu'importe puisque nous sommes là dans une zone correspondant à Δ_e , non supportée pour l'usage courant. $S/Bq(S)$ décroît également rapidement vers les très basses valeurs du signal mais dans ce cas le responsable est la décroissance de S , $Bq(S)$ restant constant comme dans une loi de quantification linéaire sur 12 bits. $S/Bq(S)$ varie alors comme S donc linéairement en fonction de S . Cependant, même dans ce domaine comme le montre la courbe, $S/Bq(S)$ est bien meilleur que celui d'une loi de quantification sur 8 bits alors que la loi A est également un codage sur 8 bits: un codage sur 8 bits faisant même aussi bien qu'un codage linéaire sur 12 bits dans ce domaine. Ceci est l'avantage procuré par une loi permettant aux intervalles d'être plus fins et plus nombreux pour les faibles S . Sur l'essentiel de la plage utile, cette loi est telle que $Bq(S)$ décroît avec S , de manière à garder S/Bq constant, c'est le plateau de la courbe qui s'étend sur une dynamique d'un facteur 1000

entre le signal le plus fort et le plus faible.

Sur les PCs, la **conversion analogique numérique** du son des prises micro et inversement pour les prises output (casque par exemple), est respectivement réalisée par les dispositifs électroniques appelés **ADC** (Analog to Digital Converter) et **DAC** (Digital to Analog Converter), intégrés aux cartes sons. Les ADC&DAC ont cependant de bien meilleures performances lorsqu'ils sont externalisés donc immunisés des bruits électroniques du PC : faible bruit, faible latence, compter moins de 20 euros pour un dispositif USB RCA basique.

Les codages

A ce stade tous nos signaux sont désormais numérisés et se présentent donc comme une suite de zéros et de uns. Mais avant de les transmettre nous devons effectuer un certain nombre de codages répondant à trois objectifs :

1. Codages qui nous permettront de détecter et parfois corriger d'éventuelles erreurs de transmissions.
2. Codages pour la compression des données pour un transfert plus rapide ou pour moins consommer de la capacité de transmission du canal.
3. Codages permettant d'associer à chaque bit ou groupe de bits un symbole à transmettre physiquement sur la ligne.

Bien entendu ces codages impliqueront les opérations inverses de décodage après réception.

Codages pour la détection et correction d'erreurs

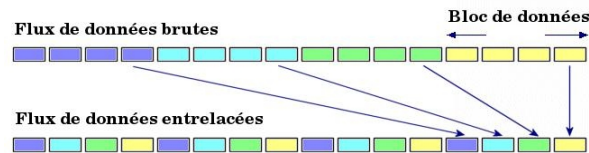
Ces codages ont tous pour principe de **rajouter des bits de contrôle** aux bits d'information ce qui a pour inconvénient de **consommer de la capacité de transmission (bande passante)** du canal. Le codage adopté correspond donc à un **compromis entre le taux d'erreurs** que l'on souhaite minimiser en les corrigeant **et la bande passante** que l'on souhaite économiser. Le codage devra idéalement s'adapter rapidement (à chaque paquet) aux conditions fluctuantes régnant sur le canal : lorsque le canal deviendra trop bruité, le récepteur devra détecter cette augmentation du taux d'erreurs et pourra demander à l'émetteur de changer de codage en conséquence.

Les techniques de codage peuvent être très sophistiquées. Le plus simple des codages (qui était utilisé en RS232, liaison courte distance entre le port série d'un PC et son modem) est celui consistant à rajouter un **bit de parité** à chaque groupe de 8 bits de telle sorte que le mot de neuf bits obtenu comporte par exemple un nombre pair de 1. Ainsi le récepteur est capable de détecter un nombre impair d'erreurs sur le mot dans le cas où la parité qu'il vérifie n'est pas celle attendue.

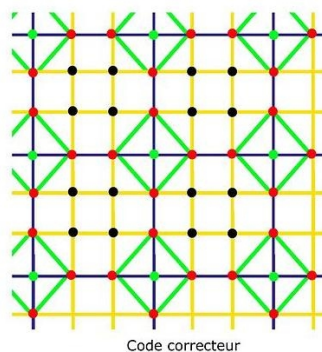
De façon générale, on peut rajouter à un mot de n bits (il en existe 2^n possibles), **$k-n$ bits de contrôle** pour obtenir un mot de k bits à transmettre sur le lien: chaque mot de n bits initial étant associé de façon univoque à un mot de k bits, il n'existe que **2^n mots valides de k bits parmi les 2^k possibles**. Si le récepteur reçoit un mot invalide, il sait qu'au moins une erreur s'est produite sur le mot et pourra éventuellement demander sa retransmission.

Dans le cas où une seule erreur s'est produite, le mot reçu sera à une **distance de Hamming** de 1 du mot initialement transmis, où la distance de Hamming entre deux mots est **définie comme étant le nombre de bits qui diffèrent entre eux**. Si le mot reçu est à une distance de un d'un mot valide M et à une distance supérieure de tous les autres mots valides, le récepteur peut en déduire qu'il ne s'est probablement produit qu'une erreur à partir de ce mot valide M et donc corriger cette erreur en devinant que c'est le mot M qui a été transmis. Bien sûr il est théoriquement possible qu'il y ait eu plusieurs erreurs à partir d'un autre mot valide, mais les erreurs étant rares on considère que la probabilité d'avoir deux ou plus erreurs dans un même mot doit être encore beaucoup plus faible.

En réalité, les erreurs ont la fâcheuse tendance à se produire en **rafales** par exemple suite à une perturbation électrique ponctuelle sur une ligne. Il se pourrait alors que le nombre de bits faux dans un mot puisse être trop souvent supérieur à un et plus difficile à corriger. La solution à ce problème est que les **bits d'un même mot** ne soient pas transmis ensemble mais au contraire **dispersés dans le flux des bits**. Ainsi, même si une rafale d'erreurs se produit, les bits faux pourront tous être corrigés à l'arrivée après que chacun ait été réattribué au mot auquel il appartenait initialement, y produisant une erreur isolée donc facile à corriger. Cette technique désignée sous le nom d'**entrelacement** est aussi utilisée pour le stockage. Par exemple les écritures et lectures des bits d'un CD ne s'effectuant pas dans le même ordre, une rafale d'erreurs en lecture pourra être corrigée.



On peut même corriger plusieurs erreurs d'un même mot si on y met le prix en utilisant le nombre convenable de bits de contrôles: au plus p erreurs seront corrigibles si la distance de Hamming minimale entre mots valides est de $2p+1$ comme on le vérifiera visuellement sur un exemple où l'on a représenté chaque mot valide par un point vert : les seuls mots corrigibles sont ici les points rouges correspondant aux mots invalides à une distance de Hamming de 1 d'un mot valide (ici $2p+1=3$ donc $p=1$).



Codages pour la compression de données

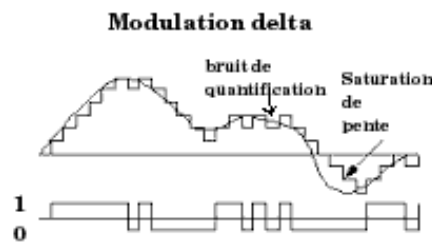
Ces **codages dits différentiels** ont tous pour principe de ne transmettre pour chaque échantillon (son) ou image (vidéo) que ce qui a varié par rapport au précédent. Cette variation est faible lorsque les images ou échantillons se succèdent à intervalles de temps très courts. Il est donc beaucoup plus avantageux de ne coder que cette différence si l'on veut économiser des bits. Nous nous focaliserons sur le son, la compression en vidéo étant détaillée dans un autre cours. On peut même gagner en compression en ne codant que la différence entre l'échantillon actuel $s(t)$ et la valeur attendue en extrapolant mathématiquement à l'instant t actuel l'évolution temporelle des échantillons précédents mais ces techniques demandent une importante puissance de calcul et un délai de décompression non négligeable (50 à 100ms) donc préjudiciable aux applications temps réel. Le plus économe des codages est la **modulation dite delta qui consiste à coder sur un bit la différence entre la valeur du nouvel échantillon $s(t)$ et la valeur $q(t-T_e)$ à laquelle on a quantifié l'échantillon précédent** :

- Si $s(t) > q(t-T_e)$, le bit transmis est 1, le décodeur devra incrémenter l'échantillon quantifié précédent d'une unité Δ pour obtenir $q(t)$.
- Si $s(t) < q(t-T_e)$, le bit transmis est 0, le décodeur devra décrémenter l'échantillon quantifié précédent d'une unité Δ pour obtenir $q(t)$.

Le décodeur ne retrouvera donc pas $s(t)$ mais $q(t)$: la modulation delta intègre donc la quantification avec son bruit associé. Par exemple un signal constant se verra alors codé par une

succession de 1 et 0 « oscillant » à la fréquence $f_e/2$ autour de la constante, $f_e=1/T_e$ étant la fréquence des échantillons. Nous verrons que la récupération du signal analogique DAC, autrement dit la courbe qui passe par les échantillons, élimine efficacement (filtre) ce bruit de quantification qui affecte tous les signaux quantifiés en modulation delta.

Un avantage de cette MIC différentielle par rapport à la MIC classique est qu'elle évite le problème de l'écrêtage de signaux d'amplitude au-delà d'une amplitude maximale x_N : il est maintenant en effet possible d'incrémenter sans limite les échantillons quantifiés. L'inconvénient est l'apparition d'un problème de saturation de pente : le signal quantifié ne peut pas varier de plus que l'incrément Δ durant T_e . Sa pente maximale est donc Δ/T_e ce qui fait que nos échantillons ne pourront pas suivre un signal évoluant de façon plus rapide (de dérivée supérieure à Δ/T_e en valeur absolue). Une solution simple à ce problème est d'augmenter f_e pour augmenter la pente maximale $\Delta/T_e = \Delta f_e$, mais avoir plus d'échantillons à transmettre par seconde consomme plus de bande passante.



Une modulation delta adaptative, plus complexe, permet de limiter le problème de saturation de pente en augmentant momentanément le Δ donc la pente maximale lorsqu'il y a plusieurs incréments ou décréments successifs.

Ces techniques de compression du son permettent soit d'améliorer la qualité à débit égal (voix jusqu'à 7kHz au lieu de 4 kHz tout en restant à un débit de 64kbits/s), soit de réduire (à 32kbits/s) le débit à qualité égale en téléphonie sans fil DECT par exemple.

Nombre de techniques plus complexes de compression existent, le choix d'une d'entre elles pour une application donnée résultant d'un compromis entre d'une part les facteurs liés de complexité, délai, consommation de CPU au niveau des codeurs/décodeurs et le débit d'autre part.

Codage : choix des symboles à transmettre pour chaque bit ou groupe de bits

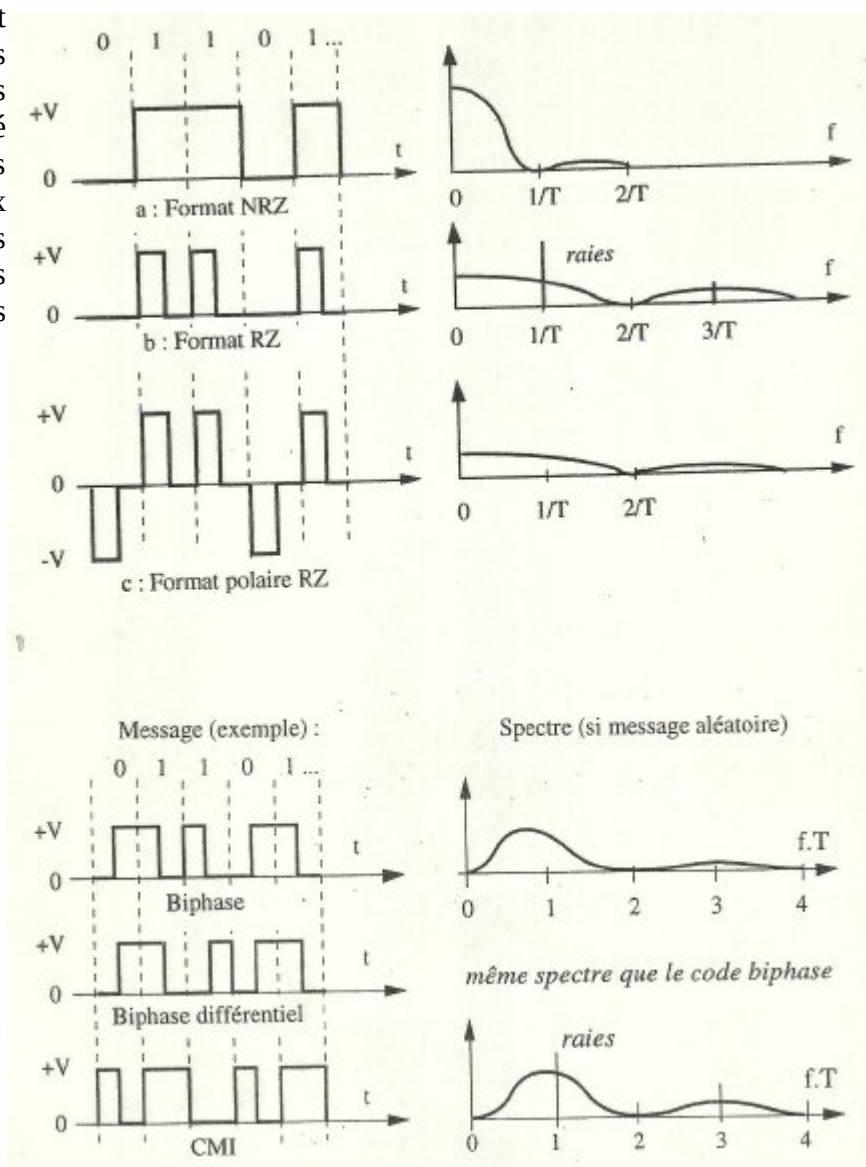
Dans ce paragraphe nous allons être un peu plus sensibilisés à l'importance des notions d'analyse spectrale. Même si nous ne maîtrisons pas encore les outils permettant de calculer les spectres et donc de savoir quelle bande de fréquences va occuper un signal nous pouvons d'ores et déjà comprendre de façon qualitative l'importance de ces notions qui guidera notre choix du format des symboles à transmettre. Le choix d'un format de symbole pour véhiculer nos bits sera en effet dicté par trois principaux critères :

1. La bande des fréquences pouvant se propager correctement sur un canal est limitée et doit être considérée comme une ressource naturelle à économiser au maximum, à exploiter au mieux. Si nous souhaitons maximiser le débit nous devons être capable d'augmenter autant que possible le nombre de bits/s transmis par Hertz de bande passante disponible ou, ce qui revient au même, consommer le moins possible de bande passante pour un débit donné c'est à dire minimiser l'encombrement spectral.
2. En général les liens de transmission, adaptés en impédance pour réduire les réflexions aux extrémités, coupent les courants continus des signaux constants (de fréquence nulle) et font subir une forte distorsion aux signaux comportant surtout des basses fréquences, distorsion

qui s'ajoute à la distorsion toujours inévitable liée à la propagation. C'est pourquoi, pour que nos symboles ne soient pas trop déformés et restent identifiables, il importe que leur spectre ne concentre pas trop de basses fréquences. Ce critère devra donc être satisfait pour des lignes de transmission de plus de quelques mètres à moins de revoir la conception des circuits du récepteur ce qui ne va pas sans une complexité accrue donc des surcouts.

- Le récepteur doit être capable de reconnaître les symboles et pour cela être suffisamment bien synchronisé c'est à dire savoir quand débute et s'achève exactement chaque symbole. Précisons que naturellement, les horloges électroniques distantes indépendantes dérivent inévitablement les unes par rapport aux autres c'est pourquoi une **resynchronisation** entre l'émetteur et le récepteur peut s'avérer indispensable pour éviter cette dérive. C'est le cas dans les transmissions dites synchrones dont le flot de bits est ininterrompu même lorsque aucune donnée utile n'est échangée justement afin que l'électronique du récepteur puisse rester « accrochée » en permanence sur celle de l'émetteur en se synchronisant sur ces bits. Certains formats de symbole qui favorisent la récupération d'horloge et donc la synchronisation du récepteur à partir du flux des données elles mêmes seront donc à privilégier en transmission synchrone. Les formats de symbole facilitant cette récupération d'horloge auront des spectres avec des caractéristiques bien particulières telles que des raies à certaines fréquences multiples de la fréquence d'horloge. Au contraire, pour les transmissions asynchrones qui se font par trames séparées par des temps morts, l'horloge réceptrice n'a besoin de se synchroniser qu'au démarrage de chaque trame. En effet, cette trame sera de durée suffisamment réduite pour que l'horloge n'ait pas le temps de dériver significativement tout au long de sa réception. Tous les symboles pourront donc être estimés correctement sans qu'il soit nécessaire qu'ils aient des propriétés particulières facilitant une resynchronisation permanente dans ce cas.

Nous allons maintenant aborder plusieurs exemples correspondant à des formats de transmission qui ont été ou sont encore très utilisés qui nous aideront à mieux comprendre ces critères ainsi que d'autres moins utilisés. Voici quelques codes et leurs spectres.



Les formats les plus élémentaires sont le NRZ, le RZ et polaire RZ. Ils ne satisfont pas les critères 2 et 1, et ne sont donc utilisables qu'à faibles débits et sur très courte distance pour que l'atténuation et la distorsion restent modérées. Par exemple, le protocole RS 232 utilise le format NRZ, où le Zéro et le Un sont codés par des niveaux électriques de 3 à 25 Volts et -3 à -25 Volts respectivement, sur une distance de l'ordre du mètre entre le port série d'un PC et un Modem. Le débit maximum est de 56kbits/s sur 2,6 m. NRZ et RZ ne satisfont pas non plus le critère 3 : le récepteur n'aurait aucun moyen de rester synchronisé sur le signal plat d'une suite de zéros par exemple. Mais c'est sans importance pour RS232 qui est asynchrone : le front de synchronisation initiale valable pour les 7 à 8 bits qui suivent est celui d'un unique bit de Start survenant après un temps mort. Le polaire RZ permet par contre une récupération de l'horloge par simple redressement du signal consistant à en prendre la valeur absolue.

Des formats un peu améliorés pour satisfaire le critère 2, ouvrent la voie à des communications sur une distance de 100 mètres sur câble Ethernet : le Manchester utilisé en Ethernet 10 base T et le Manchester différentiel (où c'est la comparaison entre le bit actuel et le bit précédent qui décide du symbole à transmettre) qui offre l'avantage d'être insensible à la polarité donc à une inversion des fils par erreur, utilisé en Token Ring. Ces protocoles permettent des débits de 10 Mbits/s sur paires torsadées.

Un format un peu meilleur, le CMI, satisfait toujours le critère 2 mais également le critère 3 grâce aux raies dans son spectre et est par conséquent utilisable pour des communications synchrones sur longue distance. Sur fibres optiques il atteint les débits de 155Mbits du protocole ATM sur les cœurs de réseau. C'est parce que la fibre a une bande passante très large et donc une très haute capacité de transmission qu'il n'est même pas nécessaire que le format des impulsions lumineuses satisfasse le critère 1 d'économie de bande passante.

Le code AMI, encore appelé bipolaire, fut très utilisé dans la première génération de réseaux de téléphonie numérique RNIS et liaisons louées dites T1 à 1.5 et E1 à 2 Mbits/s pouvant transmettre un certain nombre de voix à 64kbits/s. 1 étant codé par une alternance de niveaux +V et -V volts et 0 par zéro volts, le code ne satisfait pas le critère 3 en cas d'une longue succession de zéros c'est pourquoi il n'est adapté qu'à la téléphonie, les échantillons de PCM ayant leur bit de poids faible à 1 pour rendre impossible une longue succession de zéros. Le code a finalement été amélioré en HDB3 qui insère un Un après une succession de trois Zéros pour satisfaire le critère 3 en plus du 2 et autoriser la transmission en synchrone de n'importe quel type de données.

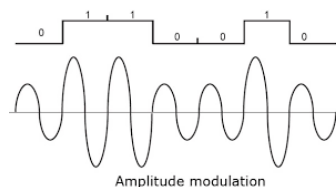
Pour monter en débit il nous faut maintenant aborder des formats ayant un encombrement spectral réduit (critère 1). Presque tous les codes que nous avons vu amélioreraient le NRZ du point de vue des critères 2 et 3 mais au prix d'un encombrement spectral doublé : à bande de fréquences de largeur identique ces codes ont un débit divisé par 2 par rapport à celui du NRZ sur très courte distance. Ce n'est pas étonnant étant donné que ces codes utilisent souvent une transition dans le symbole pour envoyer un bit là où le NRZ pourrait en envoyer 2. Ce sont des codes 1B2B : 2 bits successifs équivalent NRZ pour envoyer 1 bit d'information. Le code AMI quant à lui réussit à faire aussi bien que le NRZ du point de vue de l'encombrement spectral (critère 1) puisqu'il est resté en 1B1B en exploitant un niveau supplémentaire (-V volts).

Pour se rapprocher de l'encombrement spectral du NRZ mais sans utiliser de niveaux supplémentaires comme l'AMI, il existe les codes de type nBmB donc avec un encombrement multiplié par m/n. Par exemple 8b10b utilisé en Fast Ethernet sur deux paires de cuivre a un encombrement spectral à peine dégradé de 10/8 \Rightarrow + 25 % par rapport au NRZ et permet, parmi les 2^{10} mots de 10 bits possibles, d'avoir uniquement un sous ensemble de 2^8 mots valides utilisés pour la transmission (1 sur 4). On ne choisit que les mots ayant le plus grand nombre de transitions pour

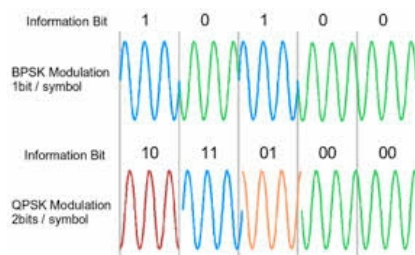
respecter le critère 3 et ce faisant on a pour le même prix, un codage détecteur et correcteur d'erreurs puisqu'on a introduit deux bits de contrôle. Le récepteur se synchronise tout simplement en se décalant dans le temps jusqu'à ne recevoir pratiquement que des mots valides ce qui se produit lorsque le taux d'erreur devient minimal. Des débits de 100Mbits/s peuvent être atteints par Fast Ethernet sur des distances typiques de LAN de l'ordre de 100 mètres de câble Ethernet.

Pour améliorer encore les débits et distances de transmission, il va falloir utiliser des codages multi-symboles capables de transmettre plusieurs bits avec un seul de ces symboles. Pour transmettre 2 bits d'un coup il nous faut un symbole pour chaque valeur que peut prendre le couple de bits. Le plus simple des codages de ce type est le 2B1Q où les couples 00,01,10,11 sont codés respectivement par les niveaux de tension $-V, -V/3, V/3, V$ volts. Sans surprise l'encombrement spectral est réduit d'un facteur 2 par rapport à celui du NRZ. Ce codage fut aussi utilisé en RNIS et HDSL. Un peu sur le même principe, le Gigabit Ethernet améliore le Fast Ethernet en transmettant 2 bits simultanément sur chacune des quatre paires de fils de cuivre.

Les formats plus performants vont devoir faire intervenir la modulation, la plus simple modulation consistant à remplacer les niveaux constants par des petits bouts de sinusoïdes d'amplitudes différentes. Le schéma suivant illustre une modulation d'amplitude à 2 symboles ne permettant que de transmettre un seul bit par symbole sinusoïdal.



La modulation permet de multiplier le nombre de symboles en jouant non seulement sur l'amplitude mais aussi la phase des bouts de sinusoïde. Avec deux (resp 4) symboles une modulation de phase est capable de transmettre 1 bit (resp 2 bits simultanément). Mais tous les codages modulés n'ont pas la même sensibilité aux perturbations, un critère supplémentaire à prendre en compte pour minimiser le taux d'erreurs sur les bits.



La modulation multi-symboles est la méthode qui intégrée à l'OFDM*, est aujourd'hui utilisée par tous les protocoles modernes (OFDM de l'ADSL, OFDM du Wifi, OFDM du CPL, OFDM du 4G, OFDM de la TNT ...) pour atteindre les débits optimisés sur des canaux de transmission difficiles : plusieurs kilomètres sur paire de cuivre téléphonique, transmissions sans fil ou sur câbles non protégés du bruit...mais la modulation multi-symboles est aussi exploitable sur câbles blindés en cuivre de catégorie 6 ou supérieure pour atteindre les très hauts débits du 10 et 100 Gigabits/s Ethernet. 10 Gbits Ethernet par exemple utilise $2^4=16$ symboles d'amplitude différente pour transmettre 4 bits par symbole. Ces techniques pourront même être utilisées sur fibres optiques en modulant l'intensité lumineuse lorsque l'on voudra encore gagner en débit mais pour le moment on peut déjà atteindre des très haut débits sur fibre même avec des codages relativement simples.

L'ancêtre du modem ADSL est le modem 56k qui pouvait atteindre, en modulation multi-symboles, 56kbits/s de données sur le câble à paires torsadées historiquement bridé pour ne transmettre que les

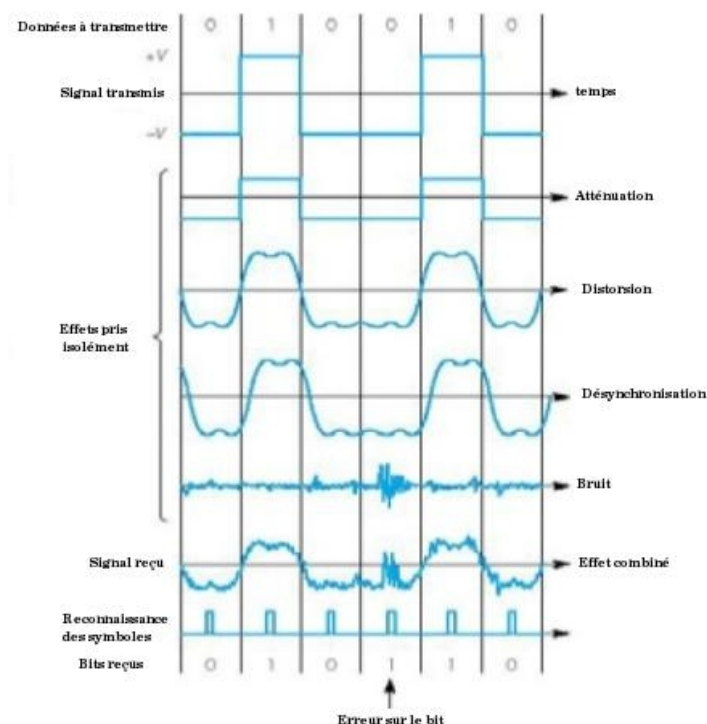
fréquences de moins de 4kHz de la téléphonie. Le modem ADSL peut en effet être considéré comme un grand nombre de modems 56k opérant en parallèle (c'est le principe de l'OFDM) pour exploiter la bande de fréquences beaucoup plus large, de plusieurs MHz, offerte naturellement par les câbles à paires torsadées de boucle locale qui ne sont plus bridés à 4kHz. L'objectif de ce cours est donc de présenter l'essentiel des techniques de traitement du signal intégrées au modem 56k, tous les modems modernes (ADSL, Wifi, CPL, 4G) fonctionnant sur le même principe. Ces modems sont notamment capables d'adapter leur modulation donc leur débit en temps réel aux conditions régnant sur la ligne.

Embrouillage

Complémentaire du codage, l'embrouillage consiste à combiner les bits que nous désirons transmettre avec ceux d'une séquence pseudo-aléatoire générée par un algorithme partagé par l'émetteur et le récepteur. Le résultat de l'opération binaire « ou exclusif » entre un bit de données d et un bit de la séquence pseudo-aléatoire p , produit le bit de la séquence transmise $t = d \oplus p$. Le récepteur récupère les bits de données d en effectuant de nouveau la même opération, le dés-embrouillage, sur les bits reçus : $t \oplus p = d \oplus p \oplus p = d$. L'intérêt est que les bits transmis de la séquence t ont les mêmes propriétés statistiques que ceux de la séquence pseudo-aléatoire p . Non seulement ils ne permettent pas de décrypter la séquence t à quiconque ne possède pas la clef qu'est la séquence pseudo-aléatoire mais en plus leur interception ne permettrait pas à un espion de savoir si un flux de données utiles est en train d'être échangé sur la ligne. Que d soit ou non une suite de zéros, t aura en effet les propriétés statistiques d'un signal aléatoire dont celle très appréciable d'avoir autant de Zéros que de Uns en moyenne et de nombreuses transitions facilitant la synchronisation du récepteur.

Émission, Propagation, Réception

Nous devons dès maintenant répertorier les différents types de perturbations affectant le signal sur son canal de propagation afin d'introduire les traitements spécifiques pour y remédier qui sont implémentés au niveau de l'émetteur et du récepteur. Nous les ré-aborderons ultérieurement en détails, lorsque nous serons plus outillés.



- **L'atténuation**

Elle est due à une perte d'énergie du signal tout au long de sa propagation, une partie de l'énergie pouvant être rayonnée par les câbles, absorbée par les matériaux traversés, transformée en chaleur par effet Joule ... Dans le cas de la propagation Hertzienne libre, l'énergie se dilue dans l'espace et l'antenne réceptrice ne pourra en capter qu'une faible fraction diminuant en $1/d^2$ avec la distance d dans le cas d'une émission isotrope. On distingue en réalité deux conséquences de cette perte d'énergie: l'atténuation proprement dite qui est la diminution de l'amplitude des symboles tout en préservant leur forme, et la distorsion.

Solutions contre l'atténuation :

Les émetteurs ont pour responsabilité de transmettre des signaux suffisamment puissants pour assurer la meilleure probabilité d'identification correcte des symboles par le récepteur, compte tenu de cette atténuation et de toutes les autres perturbations subies sur le canal : c'est en particulier le rapport de la puissance du signal à celle du bruit en réception qui devra être suffisant. Cependant, les **puissances d'émission** sont toujours limitées par les normes et réglementations en vigueur et notamment, dans les communications radio, des puissances maximales autorisées d'émission par unité d'angle solide. Il est par contre possible d'augmenter à volonté le **gain** des antennes, pour les rendre plus directives et plus spécifiquement sensibles au signal de l'émetteur qu'elles visent, à condition que leur puissance en émission respecte toujours les limitations compte tenu de ce gain.

Les **modulations** opèrent la translation du spectre d'un signal autour d'une fréquence dite porteuse idéalement favorable à sa propagation sur une ligne donnée, c'est à dire minimisant son atténuation. Dans le cas d'un signal analogique il s'agit de le combiner avec un signal sinusoïdal de fréquence appropriée, la porteuse, pour obtenir le signal modulé à transmettre. Dans le cas d'un signal numérique, le choix des formats de symbole inclut implicitement la modulation si ces symboles sont des portions de sinusoides. Un des objectifs de ce cours sera d'exposer les techniques usuelles de modulation et de démodulation.

Certains protocoles, Fast Ethernet, RS232, protocoles de transmissions sur Fibres Optiques, n'utilisent pas de modulations. Elles ne sont en effet pas indispensables sur courtes distances, à faibles débits ou pour des liens naturellement immunisés contre les bruits comme les fibres optiques. Le signal y restera donc en Bande de Base.

Dans tous les cas, les récepteurs devront être capables de récupérer la fréquence porteuse pour démoduler les signaux modulés ou récupérer l'horloge et l'utiliser pour identifier les symboles non modulés. Les méthodes de synchronisation sont donc importantes et seront également décrites.

- **La distorsion**

La distorsion est une véritable déformation des signaux tout au long de leur propagation. Nous introduirons plusieurs outils mathématiques nous permettant de prévoir la distorsion subie par n'importe quel symbole, tels que la réponse impulsionnelle et son équivalent dans le domaine fréquentiel, la fonction de transfert. On peut distinguer deux origines à la distorsion : le premier type de distorsion est la conséquence du fait que les fréquences qui composent notre signal ne sont pas toutes atténuées de la même façon au cours de sa propagation. Le deuxième s'explique par le fait que ces fréquences parviennent aussi au récepteur avec des retards différents.

En propagation Hertzienne la distorsion est souvent un étalement des symboles dû aux nombreuses répliques retardées du signal propagé en ligne directe, répliques qui parviennent au récepteur après réflexions multiples sur des obstacles.

Solutions contre la distorsion

Pour éviter la distorsion il faudrait un canal propageant toutes les fréquences de notre signal de la même façon ce qui ne serait éventuellement possible mais très limitant, qu'en adaptant le contenu en fréquences de notre signal, les propriétés du canal étant supposées figées. En général, on ne cherche donc pas à éviter la distorsion mais plutôt à connaître précisément notre canal pour savoir comment se déforment les symboles que le récepteur devra reconnaître et en tenir compte. Il est équivalent de reformer les symboles c'est à dire de leur appliquer une déformation inverse de celle subie sur le canal avant de tenter de les identifier, ou de tenter une identification directe de symboles de déformation connue. Cela s'appelle faire de l'**égalisation**, une opération d'autant plus complexe qu'elle doit s'adapter en temps réel aux propriétés fluctuantes du canal.

- **Interférences inter-symboles**

La distorsion produit en général un étalement des symboles dans le temps. Comme l'on cherche en général à atteindre les plus hauts débits possibles, les symboles qui se succèdent sont très proches dans le temps et de ce fait peuvent déborder les uns sur les autres à cause de cet étalement. L'identification correcte de chaque symbole se voit donc perturbée par une contribution du symbole précédent. C'est l'interférence inter-symboles.

Solutions contre l'interférence inter-symboles

Il en existe de plusieurs types. La plus évidente est d'éloigner dans le temps l'émission des symboles successifs au prix d'un **débit réduit**. C'est aussi le principe de modulations multi-porteuses comme l'OFDM: dans ce cas c'est sur chaque sous porteuse que les symboles sont plus espacés dans le temps.

Une autre solution est la **soustraction** pour chaque symbole de la perturbation supposée connue du symbole précédent déjà identifié ce qui suppose une bonne connaissance de notre canal en temps réel. Enfin il est possible de tolérer un certain recouvrement des symboles si l'on peut garantir que la contribution du symbole précédent est nulle à l'instant précis où nous évaluons le nouveau symbole, l'instant de décision le plus favorable où ce dernier est à son maximum d'amplitude. C'est le **critère de Nyquist** sur lequel nous reviendrons en détails lorsque nous chercherons à minimiser les effets de l'interférence inter-symbole.

- **Les bruits**

On réunit sous ce terme de bruits, toutes les perturbations extérieures, les parasites qui viennent se superposer à notre signal nous empêchant parfois d'identifier correctement les symboles. En particulier d'autres signaux que le notre doivent être considérés comme des bruits. Le principal bruit affectant les câbles en cuivre est le bruit thermique : du simple fait que le métal se trouve à une certaine température, les charges (électrons libres) qui s'y trouvent s'agitent y produisant des micro-courants qui se superposent au courant de notre signal. Ce bruit contribuant avec la même puissance à toutes les fréquences est souvent appelé bruit blanc par analogie avec la lumière blanche comportant toutes les fréquences du spectre optique. Mais il existe des bruits plus gênants en transmission tels que les bruits impulsifs provoqués par des perturbations électromagnétiques plus puissantes et ponctuelles susceptibles de produire des rafales d'erreurs. Ce peuvent être des perturbations dues à des branchements/débranchements se propageant sur le réseau commuté, des perturbations en provenance du courant fort du réseau électrique d'alimentation via la terre commune et générées par des moteurs électriques, des écrans, ou simplement des ondes électromagnétiques captées par effet d'antenne. Signalons que la fibre optique est affectée par un autre bruit, beaucoup plus faible relativement à la puissance du signal optique: le bruit quantique.

Solutions contre les bruits

Il importe de maximiser le rapport S/N de la puissance du signal S à la puissance du bruit N au niveau du récepteur c'est à dire après atténuation du signal et nous avons déjà évoqué la possibilité de jouer sur la [puissance d'émission](#). Il est intéressant de remarquer qu'en général les bruits distribuent leur énergie sur une plage de fréquences beaucoup plus étendue que celle de notre signal. Il devient donc possible de supprimer à la réception l'essentiel de ces fréquences du bruit en épargnant celles de notre signal grâce à des circuits optimisés : c'est le [filtrage](#) qui souvent améliore considérablement le rapport S/N. Il est tentant de resserrer le filtrage autour de notre signal pour couper un maximum de bruit, si l'on accepte de couper aussi un peu de l'énergie de notre signal. Il faut alors comprendre qu'un tel filtrage va provoquer de la distorsion, plus précisément étaler les symboles et que le critère de Nyquist pour minimiser l'interférence inter-symbole nous imposera alors d'espacer un peu plus nos symboles dans le temps donc de réduire le débit. Le filtre choisi finalement résultera donc d'un compromis entre débit et rapport S/N obtenu grâce au filtre, ce rapport influant sur le taux d'erreurs.

Nous retrouvons un compromis analogue entre débit et taux d'erreur lorsque nous choisissons le format de transmission multi-symboles. En effet, si le bruit n'existait pas nous pourrions augmenter à volonté le nombre de nos symboles. Certains symboles auraient alors des formes de plus en plus proches les unes des autres mais en l'absence de perturbation nous serions toujours capables de les distinguer aussi similaires soient ils. En faisant croître le nombre de symboles à l'infini, chaque symbole étant capable de coder de plus en plus de bits, nous pourrions même augmenter à l'infini le débit. C'est ce que confirme la formule théorique de Nyquist valable en absence de bruit donnant le débit maximum atteignable D_{max} en fonction du nombre V de symboles ($V=2$ en NRZ) et de la bande passante de notre canal, largeur W de la bande de fréquences que notre canal propage le mieux :

$$D_{max} = 2 W \ln(V) / \ln(2)$$

Pour $V=2^p$, $D_{max} = 2Wp$. Entre parenthèses, il est donc utile de distinguer le nombre de symboles transmis par seconde (au plus $2W$) qui s'exprime en bauds du débit binaire en bits/sec (au plus $2Wp$), lorsque chaque symbole transporte p bits ($p > 1$).

En réalité bien sûr, le bruit existe toujours et il faut remplacer cette formule idéale par la [formule de Shannon](#) pour en tenir compte :

$$D_{max} = W \ln(1+S/N) / \ln(2)$$

Cette formule nous dit que le débit de bits correctement transmis que l'on peut espérer atteindre, notamment en multipliant le nombre de symboles mais aussi par n'importe quelles autres stratégies aussi sophistiquées soient elles, admet une limite indépassable qui ne dépend que de W et S/N mais pas de V . En effet, il est clair qu'en présence de bruit augmenter le nombre de symboles donc les rapprocher au-delà d'un certain seuil doit finir par faire exploser la probabilité de commettre des erreurs en les confondant, donc doit finir par réduire le débit de bits correctement transmis.

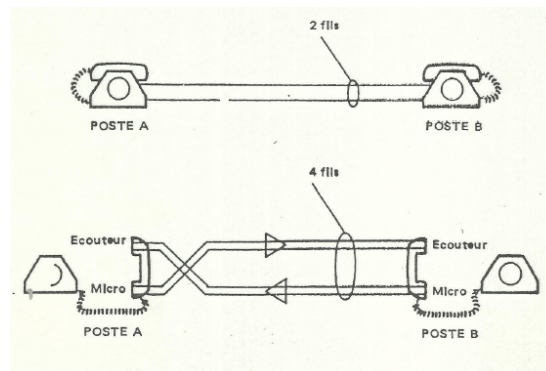
Exemple illustrant la formule de Shannon : Dans le cas d'une ligne téléphonique classique, c'est à dire bridée à $W \sim 3\text{kHz}$ pour se dédier exclusivement à la voix, et un rapport S/N typiquement de l'ordre de 1000, D_{max} vaut à peu près 30kbits/s. Si le modem à 56kbits qui était employé sur ce type de lien, semble autoriser, comme son nom l'indique, un débit double, ce n'est que parce que les données y sont compressées d'un facteur proche de 2 avant la transmission proprement dite. Pour atteindre les dizaines de Mbits de l'ADSL il faut débrider la paire téléphonique pour exploiter sa bande naturelle qui se compte en MHz. Nous passerons en revue au paragraphe suivant les liens de transmission classiquement utilisés en télécommunication, qui sont autant d'exemples permettant d'illustrer la formule de Shannon. Les modulations du signal numérique que nous aborderons dans ce cours n'ont pour seul objectif, en jouant sur la forme et le nombre des symboles, que de nous

rapprocher autant que possible du maximum théorique fixé par la formule de Shannon pour chaque canal, W étant imposé par le canal lui-même et S/N par le canal, l'environnement et les réglementations.

L'écho et la diaphonie produisant des perturbations externes venant se superposer à notre signal, nous aurions pu les classer parmi les bruits. Ils ont cependant la particularité d'être prévisibles et donc possibles à soustraire c'est pourquoi ils méritent un traitement à part.

- **L'écho et les communications concurrentes**

Il y a toujours une petite partie de la puissance du signal qui est réfléchi en bout de ligne dans le cas de la propagation guidée ou réfléchi par des obstacles en propagation libre et qui revient à l'émetteur : c'est l'écho. Par exemple en téléphonie classique sur l'unique paire de fils de la boucle locale joignant le poste de l'utilisateur au répartiteur de l'opérateur, cet écho bien que présent n'est pas une gêne car la distance étant très courte (au plus quelques kilomètres), le délai entre la voix émise et réfléchi n'est pas audible par l'utilisateur. Il ne le devient que sur les liaisons sur longue distance, par exemple intercontinentales, pour lesquelles une solution est d'utiliser deux paires distinctes de fils correspondant aux deux sens de la communication. Dans ce cas le lien sur lequel on parle n'étant pas le même que celui sur lequel on écoute, on n'est plus sensible à l'écho. C'est aussi le cas en Ethernet où l'on dispose de paires distinctes pour l'émission et la réception simultanée : le Full Duplex.

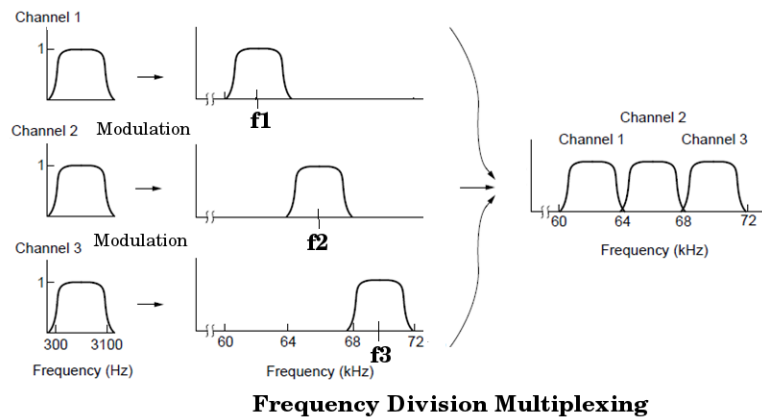
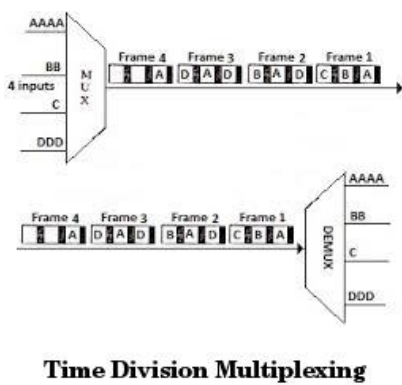


Solutions contre l'écho sur paire unique

Le problème se repose cependant sur la boucle locale lorsque on veut utiliser celle-ci pour transmettre des données numérisées toujours sur une seule paire, la seule historiquement disponible. L'écho des bits émis vient alors se superposer aux bits reçus et en gêner la reconnaissance, augmentant le taux d'erreurs. Une solution activable dans les modems 56k était la **suppression d'écho**, puisque connaissant les caractéristiques du signal émis et notre canal, il était possible de prédire l'écho et de le soustraire. Dans les modems modernes de type ADSL, le problème est résolu par le fait d'utiliser des bandes de fréquences différentes et bien séparées en émission et en réception. La fréquence sur laquelle on émet n'étant pas la même que celle sur laquelle on reçoit, on n'est plus sensible à l'écho.

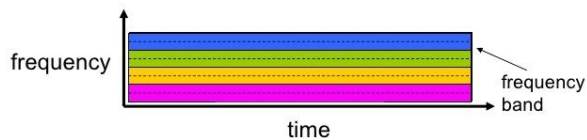
Partager la bande passante d'un canal en différentes sous bandes pouvant être exploitées simultanément par plusieurs communications et plusieurs sens de communication (Full Duplex) est une possibilité nommée **multiplexage FDM** (Frequency Division Multiplexing) que nous pouvons exploiter grâce aux modulations sur diverses fréquences bien séparées : jusqu'à 10000 voies téléphoniques peuvent ainsi se partager un câble coaxial. Il existe d'autres types de multiplexage, par exemple le **TDM** (Time Division Multiplexing) consistant à découper chaque période de temps en tranches (slots), chaque tranche étant attribuée et réservée à une voie de communication. Dans

ce cas c'est le temps plutôt que les fréquences que l'on se partage pour cohabiter sans se gêner sur le canal.

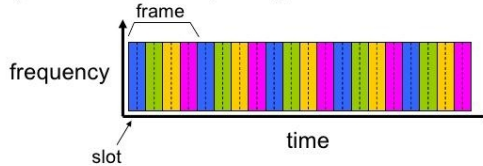


Example:
4 users

FDM (Frequency division multiplexing)



TDM (Time division multiplexing)



- **La diaphonie**

Le signal électrique sur une paire peut induire un courant sur une paire voisine par couplage électromagnétique : c'est la diaphonie (crosstalk en anglais). En particulier, c'est au plus proche de l'émetteur, que le signal émis est à son maximum de puissance tandis que le signal reçu sur la paire voisine est au contraire le plus affaibli par l'atténuation et par conséquent le plus vulnérable aux perturbations. C'est donc là que la contribution de la diaphonie est la plus importante relativement au signal reçu. Bien que les paires de fils soient torsadées et parfois blindées, réduisant au maximum les couplages électromagnétiques et la diaphonie, celle-ci parfois reste significative.

Solution à la diaphonie

A nouveau il s'agit d'un effet prévisible donc possible à soustraire du signal en réception par un circuit électronique dédié **suppresseur de diaphonie**.

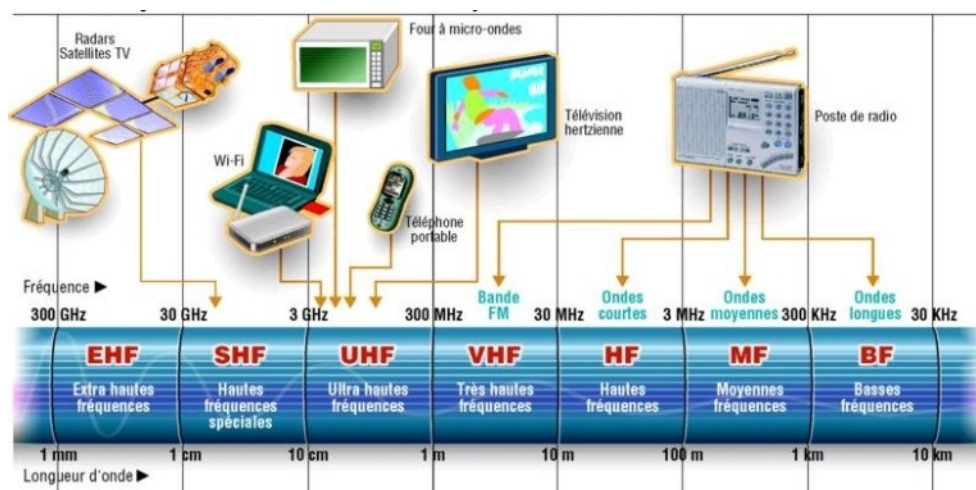
Pour achever ce tour d'horizon de la ligne de transmission de l'information, il ne nous reste plus qu'à examiner le tableau suivant comparant les principaux supports physiques de propagation utilisés en transmission :

Support	Paires torsadées	Paires coaxiales	Fibres optiques	Ondes radio	Infrarouge
Propagation	guidée			libre ou dirigée	dirigée
Matériau	conducteur (<i>cuivre</i>)		isolant (<i>verre polymère</i>)		
Bande passante	limitée (<i>kHz à MHz</i>) à élevée	élevée (<i>centaines de MHz</i>)	très élevée (<i>GHz</i>)	limitée par l'encombrement des fréquences	élevée
Atténuation	forte (réduite si <u>blindage</u>)	augmente avec la fréquence	très faible	faible mais très variable	totale si obstacles
Sensibilité à la diaphonie et aux brouillages	forte (réduite si <u>blindage</u>)	faible	nulle	forte	faible
Confidentialité	limitée à correcte	correcte	élevée	nulle (sauf si cryptage)	relative
Coût du support	faible	élevé	assez faible	nul	nul
Coût des interfaces	très faible	faible	élevé	assez faible	moyen
Transmission d'énergie (<i>télé-alimentation</i>)	Oui (électrique)	Oui (électrique)	Optoalimentation (expérimentale)	non	non
Applications	lignes téléphoniques modems bas ou moyens débits, réseaux hauts locaux débits	Réseaux locaux haut débit, distribution vidéo	Réseaux longue distance et/ou hauts débits, réseaux industriels	Communications mobiles, faisceaux hertziens, satellites	Télécommande communications « indoor »

Remarquons que les performances sont la conséquence du fait que les câbles conducteurs sont plus ou moins rayonnants et, cela va de pair, sensibles aux perturbations électromagnétiques externes contrairement à la fibre, matériau isolant. Il est normal qu'un canal où le signal perd de son énergie par rayonnement ait une atténuation plus forte, bande passante donc capacité de transmission réduite, et en même temps forte sensibilité aux perturbations externes dont la diaphonie donc confidentialité limitée. Tout cela s'améliore de façon significative sur les paires torsadées de catégorie supérieure (5, 6, 7) par le pas réduit de la torsade, le blindage individuel de chaque paire et l'écrantage de l'ensemble des paires permettant des centaines de MHz de bande passante et d'approcher les performances du câble coaxial. C'est pourquoi la paire torsadée s'est imposée sur le câble coaxial, plus onéreux, sur les réseaux locaux à hauts débits (Gbits/s) tandis que la Fibre s'impose pour le très haut débit ($\geq 10\text{Gbits/s}$) et les longues distances.

Sur les ondes radio la bande passante disponible croît évidemment avec les fréquences de transmission utilisées, les basses fréquences sont donc plus appropriées pour la transmission du son et faibles débits, notamment sur des très longues distances et sans visibilité directe en profitant de la réflexion sur l'ionosphère et de la diffraction.

Aux plus hautes fréquences supportant les très hauts débits des contenus multimédia, les phénomènes de diffraction utiles pour atteindre des récepteurs sans visibilité directe en contournant les obstacles, deviennent négligeables. Heureusement les fréquences utilisées en téléphonie mobile et Wifi peuvent passer à travers les cloisons lorsqu'elles ne sont pas trop épaisses ni ferrillées ce qui autorise la mobilité. La fiabilité et la qualité de la transmission sont cependant toujours beaucoup mieux garanties sur câbles qu'en sans fil.



Signaux déterministes et aléatoires

Notre introduction nous a permis d'identifier les grandes étapes de traitement que doit subir le signal analogique ou numérique sur une liaison de transmission, parmi lesquelles certaines, comme l'échantillonnage, le filtrage, l'égalisation ou la modulation n'ont été que superficiellement évoquées car nécessitent l'introduction d'outils mathématiques adéquats pour les comprendre véritablement. C'est ce que nous nous proposons de faire maintenant en adoptant une approche intuitive réduisant le formalisme au strict minimum et n'exigeant qu'une maîtrise minimale des méthodes d'intégration, de la trigonométrie ou des nombres complexes.

On distingue les signaux dits déterministes dont l'évolution temporelle $x(t)$ suit une loi mathématique (fonction) connue, des signaux aléatoires n'obéissant qu'aux lois du hasard. Bien que ces derniers soient essentiels pour nous (car les signaux que l'on reçoit d'une ligne de transmission étant une succession de symboles Un et Zéro que l'on ne connaît pas à l'avance, ils doivent être considérés comme aléatoires), nous devons commencer par le plus simple : les signaux déterministes.

Notre premier objectif est donc d'introduire un certain nombre de signaux déterministes élémentaires et de définir un certain nombre de grandeurs qu'il est intéressant de savoir estimer pour caractériser ces signaux déterministes : la valeur moyenne, la puissance, l'énergie, l'auto-corrélation. Ces signaux élémentaires seront autant de briques à partir desquelles nous serons en mesure de construire rapidement des signaux bien plus élaborés approchant des signaux réels mais également outils qui nous permettront plus tard de comprendre et modéliser les effets du canal de transmission sur n'importe quel signal qui s'y propage. Mais commençons par introduire quelques règles de base.

Règles basiques :

- Dans l'expression de tout signal $x(t)$, il suffit de remplacer t par $t-t_0$ pour obtenir le signal $x(t-t_0)$ décalé dans le temps de t_0 , le paramètre de translation temporelle. En effet, $x(t)$ prend la même valeur en tout instant $t=t'$ que $x(t-t_0)$ en $t = t' + t_0$. Remplacer pour le vérifier.
- Dans l'expression de tout signal $x(t)$, il suffit de remplacer t par t/T pour obtenir le signal $x(t/T)$ dilaté dans le temps (si $T>1$ et contracté si $T<1$) d'un facteur T . En effet, $x(t)$ prend la même valeur en tout instant $t=t'$ que $x(t/T)$ en $t = T t'$. Remplacer pour le vérifier.
- Enfin, tout signal peut être multiplié par un facteur positif A qui va l'amplifier (si $A>1$) ou l'atténuer (si $A<1$).
- Nous cherchons à estimer la surface S entre la courbe d'un signal $x(t)$ et l'axe t . Cette surface représentée en rouge (cf [animation geogebra ggb1](#)) étant comptée positivement ou négativement selon que la courbe est au dessus ou en dessous de l'axe, déplacez les instants t_1 et t_2 et observez la variation de S . Positionnez le curseur switch à 1. Sont représentés un certain nombre de rectangles qui suivent la courbe tout en restant en dessous de celle-ci. Leur surface totale cumulée qui est indiquée diffère de celle de S mais si vous augmentez le nombre de rectangles en déplaçant le curseur n , observez que cette surface tend vers S . De même pour la surface totale des rectangles inférieurs (curseur switch à zéro). Lorsque on augmente à l'infini le nombre de rectangles, leur largeur dt tend vers zéro et la surface de chaque rectangle est le produit de sa hauteur $x(t)$ par sa largeur dt . La somme de toutes les surfaces infinitésimales $x(t)dt$ pour t parcourant l'intervalle entre t_1 et t_2 converge donc vers la surface S recherchée que l'on peut donc écrire $S =$ somme de $x(t)dt$ entre t_1 et t_2 :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

Signaux déterministes élémentaires :

- $x(t) = \cos(2\pi t)$ signal cosinus oscillant entre -1 et 1 . Ce signal est périodique : il se répète avec ici une période de 1s car pour tout instant t, $x(t) = x(t+1)$ comme on le vérifiera en remplaçant t par t+1 dans l'expression de x(t) .
Il suffit d'appliquer les règles précédentes de translation temporelle par t_0 , dilatation temporelle par T et amplification/atténuation par A pour obtenir

$$x(t) = A \cos\left(2\pi \frac{t-t_0}{T}\right)$$

cosinus d'amplitude A, décalage à l'origine t_0 et période T dont l'inverse est la fréquence $f=1/T$, nombre d'oscillations par seconde (cf [ggb2](#)).

On réécrit parfois ce signal sous la forme $x(t) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right)$ où l'on a isolé et

renommé le terme $2\pi \frac{-t_0}{T}$ en φ , la phase à l'origine. Un décalage temporel t_0 d'une période entière T, une demi ou un quart de période correspondent donc respectivement à un retard de phase de 2π (une oscillation ou tour complet), π (demi oscillation) ou $\pi/2$ (quart d'oscillation). Le cosinus déphasé de $-\pi/2$ n'est autre que le sinus :

$$\cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \pi/2\right) = \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

- De façon analogue à partir de la fonction $\text{rect}()$ on construit le signal rectangulaire

$$x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$

de hauteur A, largeur T, et centré en t_0 (cf [ggb3](#)).

- Si on impose $A=1/T$ on observe que lorsque T tend vers zéro, notre rectangle centré en zéro se rétrécit en largeur et s'étire indéfiniment en hauteur (cf [ggb3](#) switch=1) tandis que sa surface reste constante et égale à $1 = T \cdot (1/T)$. On choisit alors de le représenter par une flèche de hauteur 1, sa surface, et que l'on nomme impulsion delta de Dirac $\delta(t)$. Etant infiniment fin, il serait vain d'essayer de la dilater/contracter d'un facteur $a > 0$, en considérant $\delta(t/a)$. En effet ce signal est maintenant la limite du rectangle devenant infiniment fin et infiniment haut mais dont la base a été multipliée par a, donc ayant une surface a : autrement dit $\delta(t/a)$ n'est rien d'autre que $a \delta(t)$, représenté par une flèche de hauteur a .

Si on ne peut réellement la dilater on peut par contre amener l'impulsion de Dirac en t_0 et modifier son amplitude (surface) A : $x(t) = A \delta(t-t_0)$.

L'égalité $x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0)$ est vraie quelque soit t car elle est vraie à la fois pour $t = t_0$ (trivial car il suffit de remplacer x(t) par x(t₀) à gauche) et pour $t \neq t_0$ (trivial car le delta de Dirac est nul en dehors de $t=t_0$, donc l'égalité devient $0=0$).

Cette égalité signifie que si on multiplie un signal x(t) par une impulsion de Dirac en t_0 , on obtient une impulsion de Dirac en t_0 d'amplitude $x(t_0)$ que l'on peut considérer comme un échantillon prélevé sur x(t) à l'instant t_0 . Notons que cet échantillon à une surface finie $x(t_0)$ ce qui s'avèrera plus pratique que d'imaginer notre échantillon comme une fonction nulle partout sauf en t_0 où elle vaudrait $x(t_0)$.

- Une somme infinie d'impulsions de Dirac positionnées à intervalles réguliers T est ce que l'on appelle un peigne de Dirac que l'on note

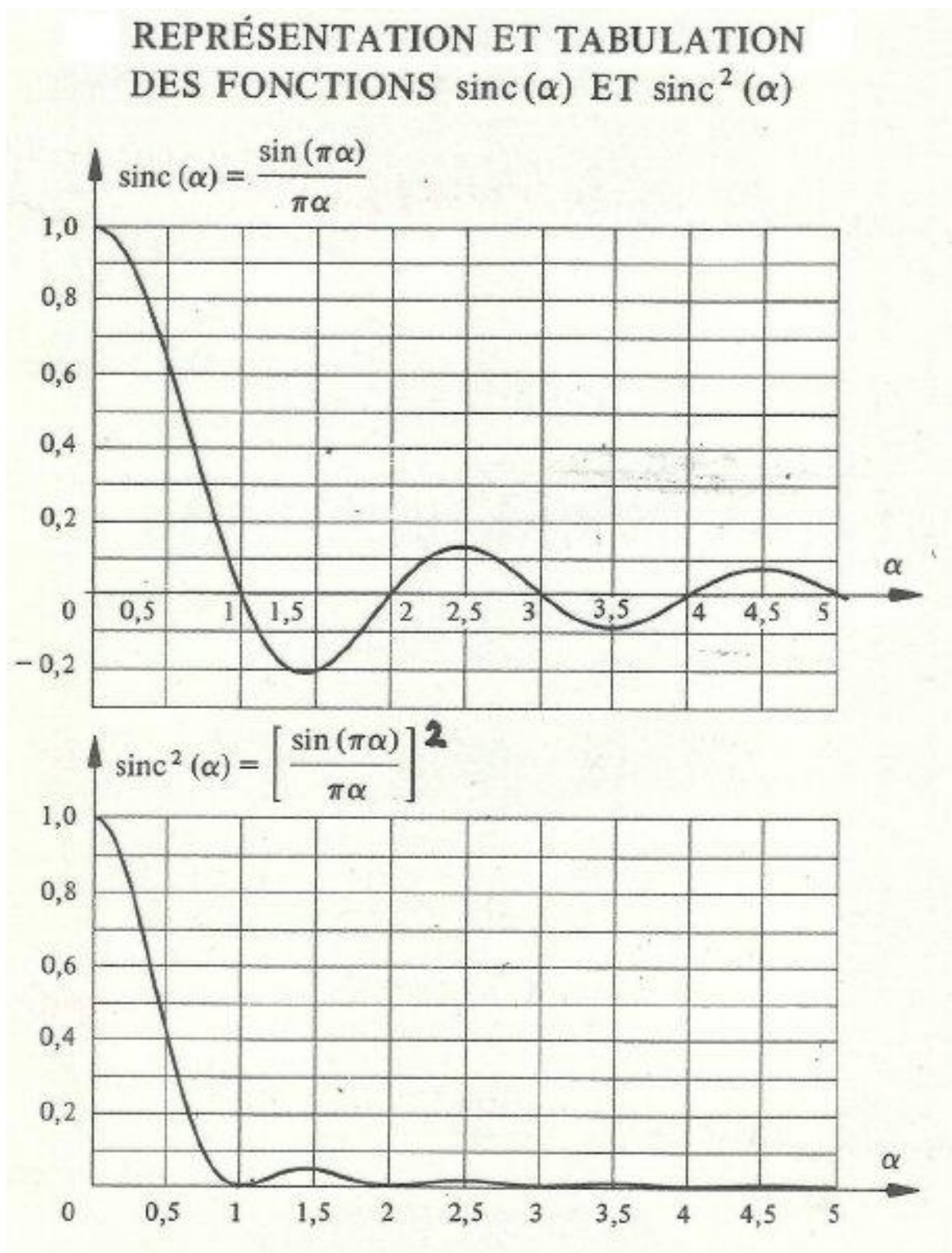
$$\delta_T(t) = \dots \delta(t-iT) + \dots \delta(t-2T) + \delta(t-T) + \delta(t) + \delta(t+T) + \delta(t+2T) + \dots \delta(t+iT) + \dots$$

En multipliant notre signal x(t) par $\delta(t)$ nous avons vu que nous prenions un échantillon sur notre signal en $t=0$. Multiplier maintenant x(t) par le peigne de Dirac $\delta_T(t)$ revient donc à véritablement échantillonner ce signal i.e prélever sur celui-ci une infinité

d'échantillons avec une période d'échantillonnage T.

- La fonction sinus cardinal définie par $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ représentée sur la figure 1, oscille comme un sinus dont les oscillations sont amorties lorsque t croît au dénominateur. Lorsque t tend vers zéro, numérateur et dénominateur tendent vers zéro de « la même façon » de sorte que le rapport tend vers 1. Le carré de ce sinus cardinal est également représenté qui est évidemment toujours positif et est encore plus amorti (le carré d'un nombre < 1 est encore plus petit).

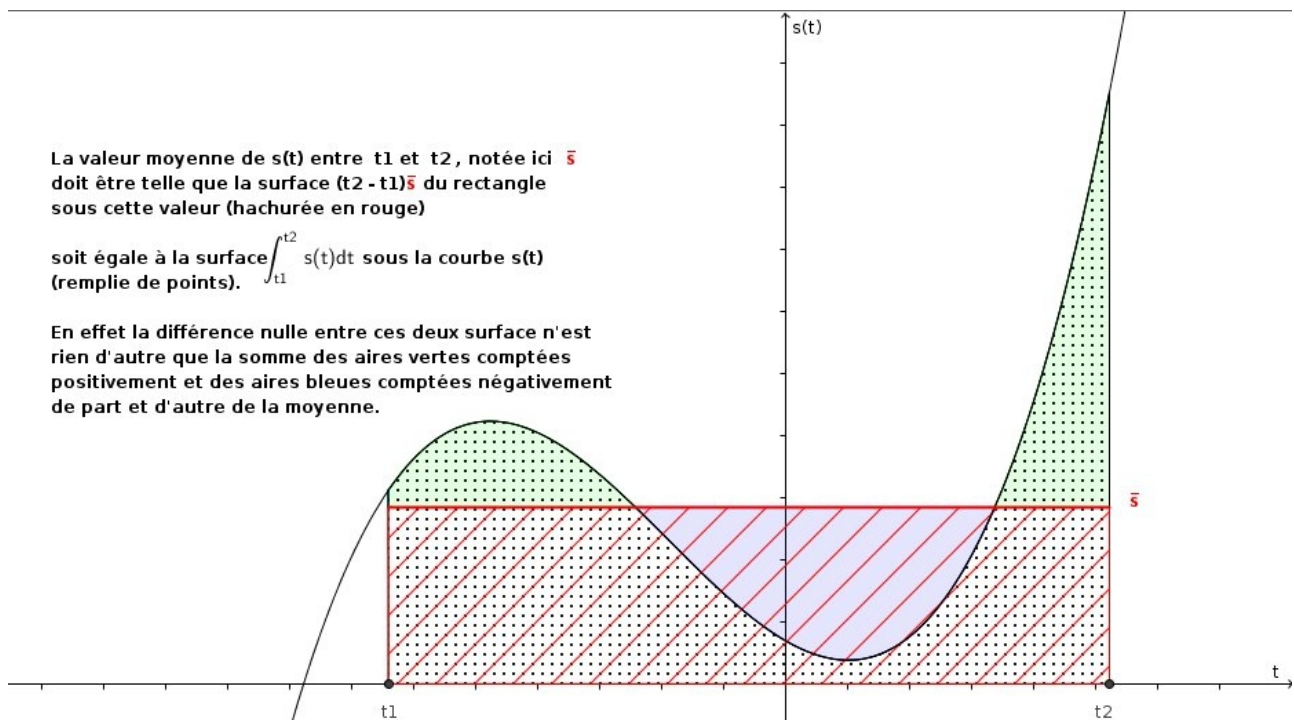
Figure 1



Moyenne, Energie, Puissance d'un signal déterministe

- Moyenne

Intuitivement on comprend que la moyenne $\bar{x}_{[t_1, t_2]}$ d'un signal $x(t)$ entre deux instants t_1 et t_2 qui peuvent être choisis infinis ($-\infty$ ou $+\infty$) doit être telle que la surface délimitée par $x(t)$ et \bar{x} (prise positivement ou négativement selon que $x(t)$ est au dessus ou au dessous de \bar{x}) s'annule.



On a donc:

$$(t_2 - t_1)\bar{x} = \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

- Énergie

Nous avons vu que la surface S entre la courbe de $x(t)$ et l'axe t pouvait s'annuler par compensations de contributions positives et négatives. L'énergie totale W d'un signal entre t_1 et t_2 doit être toujours cumulative et ne doit donc pas pouvoir subir de telles compensations. On la définit donc comme la surface entre $x^2(t)$ toujours positif et l'axe t (en fait, nos signaux étant des grandeurs électriques cette définition nous est imposée par celle de l'énergie électrique en physique).

$$W = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

- Puissance

Comme en physique, la puissance P doit être l'énergie totale W entre t_1 et t_2 divisée par la durée $t_2 - t_1$. Autrement dit la puissance n'est rien d'autre que la moyenne de $x^2(t)$.

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

Pour les signaux que nous rencontrerons en pratique, $W_{]-\infty, \infty[}$ est inexploitable s'ils continuent de varier de moins à plus l'infini notamment les signaux périodiques, car dans ce cas cette énergie

totale est infinie. Mais l'intervalle $t_2 - t_1$ dans ce cas est également infini au dénominateur de la formule de la Puissance de sorte que la puissance $P_{]-\infty, \infty[}$ est exploitable car finie. Dans le cas d'un signal périodique, cette puissance étant une moyenne, on peut l'évaluer sur une seule période partant d'un instant t_1 quelconque, par exemple $P_{]-\infty, \infty[} = P_{[0, T]}$.

Au contraire pour les signaux qui ne sont non nuls que dans un intervalle de durée finie, l'énergie $W_{]-\infty, \infty[}$ est finie donc exploitable, tandis que la puissance $P_{]-\infty, \infty[}$ obtenue en divisant cette énergie finie par $t_2 - t_1$ infini, est nulle donc inexploitable. En conclusion, pour les signaux à énergie finie on utilisera $W_{]-\infty, \infty[}$ et pour les autres $P_{]-\infty, \infty[}$.

On calculera pour s'exercer $W_{[-T/2, T/2]}$, $P_{[-T/2, T/2]}$, $W_{]-\infty, \infty[}$ et $P_{]-\infty, \infty[}$ pour le signal $A \text{ rect}(t/T)$ et, pour ceux qui maîtrisent le calcul intégral, s'exercer avec $A \cos(2\pi t/T)$.

Distance entre deux signaux déterministes

La distance entre deux signaux déterministes nous sera utile pour mesurer à quel point deux signaux diffèrent l'un de l'autre. Par exemple les symboles représentant le Zéro et le Un transmis sur la ligne devraient idéalement être le plus distants possibles l'un de l'autre pour minimiser la probabilité qu'aura le récepteur de les confondre en présence de bruit. Il y a de nombreuses possibilités pour définir la distance entre $x(t)$ et $y(t)$, la plus triviale étant la surface toujours comptée positivement délimitée par $x(t)$ et $y(t)$, autrement dit l'intégrale de $|x(t)-y(t)|$. Pour éviter les discontinuités produites par la valeur absolue nous utiliserons plutôt par la suite la distance $d(x,y)$ définie entre t_1 et t_2 par :

$$d(x, y) = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - y(t))^2 dt}$$

Fonction d'inter-corrélation entre deux signaux déterministes

Il peut être intéressant d'étudier comment évolue la distance entre ces signaux au fur et à mesure qu'on les décale dans le temps l'un par rapport à l'autre par exemple de $-\tau$, autrement dit la distance $d(x(t), y(t+\tau))$. Une grandeur pouvant quantifier cette similitude en fonction du décalage temporel $-\tau$ est la fonction d'inter-corrélation $c_{xy}(\tau)$ qui est directement liée à $d(x(t), y(t+\tau))$: lorsque la distance diminue, la fonction d'inter-corrélation qui évalue le degré de ressemblance entre les deux signaux augmente comme nous allons le voir. Elle nous sera en particulier très utile pour synchroniser le récepteur qui doit comparer chaque symbole reçu avec l'un des symboles de référence pour reconnaître et décider s'il s'agit d'un Un ou d'un Zéro par exemple. Si le symbole reçu et le symbole de référence sont identiques l'inter-corrélation doit passer par un maximum lorsque on a décalé le symbole de référence de sorte qu'il occupe le même intervalle temporel que le symbole reçu. Le récepteur ne connaît pas à l'avance précisément le décalage temporel à utiliser et c'est le pic de la fonction d'inter-corrélation qui devra le lui indiquer.

La fonction d'inter-corrélation $c_{xy}(\tau)$ qui répond à toutes ces exigences est définie par :

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t+\tau) dt$$

rien ne nous interdit d'appliquer cette formule pour estimer la corrélation d'un signal $x(t)$ avec $x(t+\tau)$ donc au fur et à mesure qu'il se décale par rapport à lui même. On obtient ainsi la fonction d'auto-corrélation.

$$c_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t+\tau) dt$$

En développant la formule de la distance on vérifie que $d^2(x(t), x(t+\tau)) = 2(c_x(0) - c_x(\tau))$: comme annoncé, au fur et à mesure que τ s'écarte de plus en plus de 0, $c_x(\tau)$ qui est maximum en $\tau=0$,

diminue : le signal se ressemble de moins en moins à lui même et $d(x(t), x(t+\tau))$ croît. Par changement de variable $u=t+\tau$, on vérifie aussi que $c_x(\tau) = c_x(-\tau)$: la fonction d'auto-corrélation est paire (symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

On remarque que $c_x(0)$ n'est rien d'autre que l'énergie totale $W_{]-\infty, \infty[}$ du signal $x(t)$. Ceci nous indique que de même que $W_{]-\infty, \infty[}$ ces formules de $c_{xy}(\tau)$ et $c_x(\tau)$ ne donnent un résultat fini donc exploitable que pour des signaux d'énergie finie.

Pour les signaux d'énergie infinie, on utilisera des formules modifiées incluant une division par l'intervalle d'intégration

$$c_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y(t+\tau) dt$$

$$c_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t+\tau) dt$$

de sorte que $c_x(0)$ n'est rien d'autre, cette fois-ci, que la puissance $P_{]-\infty, \infty[}$ non nulle et exploitable pour un tel signal.

Il ne reste plus qu'à se convaincre que la fonction d'inter-corrélation effectue bien ce dont nous avons besoin en s'exerçant à la calculer avec des signaux $x(t)$ et $y(t)$ suffisamment simples pour que les calculs d'intégrales se ramènent à des calculs de surface de figures géométriques bien connues. Calculer la fonction d'inter-corrélation entre $x(t) = A \text{ rect}(t/T)$ et $y(t) = B \text{ rect}(t/T')$ (cf [ggb4](#) pour la réponse). Dans le cas où T et T' sont différents on obtient un trapèze, et pour $T=T'$ un triangle de largeur $2T$ et de maximum ABT , désigné sous le nom de $ABT \text{ tri}(t/T)$ et $T \text{ tri}(t/T)$ est donc la fonction d'auto-corrélation de $\text{rect}(t/T)$. Comme on le voulait, l'inter-corrélation atteint bien son maximum lorsque les deux signaux coïncident dans le temps.

Relevons au passage les différentes conventions : T est la largeur du $\text{rect}(t/T)$, tandis que $2T$ est la largeur de $\text{tri}(t/T)$.

Moyenne et fonction d'auto-corrélation d'un signal aléatoire

Pour un signal aléatoire la fonction mathématique $x(t)$ n'est pas connue à priori même si on peut en obtenir une réalisation temporelle simplement en enregistrant son évolution au cours du temps. Il est alors possible de calculer une moyenne temporelle expérimentale à partir de mesures effectuées à de nombreux instants sur cette réalisation. C'est ce que l'on fait par exemple en calculant la moyenne de toutes les valeurs obtenues après un grand nombre de lancés de dé. Plus ce nombre est grand plus cette moyenne expérimentale devrait approcher une moyenne statistique théorique. Pour calculer cette dernière nous avons besoin de connaître pour tout x la loi de probabilité $p(x,t)$ d'obtenir la valeur x au lancé effectué à l'instant t . On voit donc que même si on ne connaît pas $x(t)$ pour un signal aléatoire il est possible de calculer une moyenne en exploitant notre connaissance du dispositif physique qui génère les valeurs aléatoires. Dans le cas du dé supposé parfait toutes les valeurs ont la même probabilité d'apparaître, elles sont dites équiprobables : $1/6$ pour les 6 valeurs possibles du dé et la moyenne s'obtient en effectuant la somme discrète de toutes les valeurs possibles chacune affectée d'un poids qui est sa probabilité :

$$\mu_x = \sum_i x_i p(x_i) = 1(1/6) + 2(1/6) + 3(1/6) + 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6)$$

Les propriétés du dé ne se modifiant pas au cours du temps, $p(x,t) = p(x)$: le signal est dit stationnaire et $p(x_i) = 1/6$ pour les 6 valeurs x_i possibles.

Dans le cas général, la variable aléatoire peut très bien prendre un nombre infini de valeurs d'un

continuum et pas juste un nombre fini de valeurs discrètes comme le dé et alors la formule de la moyenne statistique devient une somme continue, autrement dit une intégrale (cf notre traitement du bruit de quantification) sur le continuum de valeurs accessibles à x :

$$\mu_x(t) = \int x p(x, t) dx$$

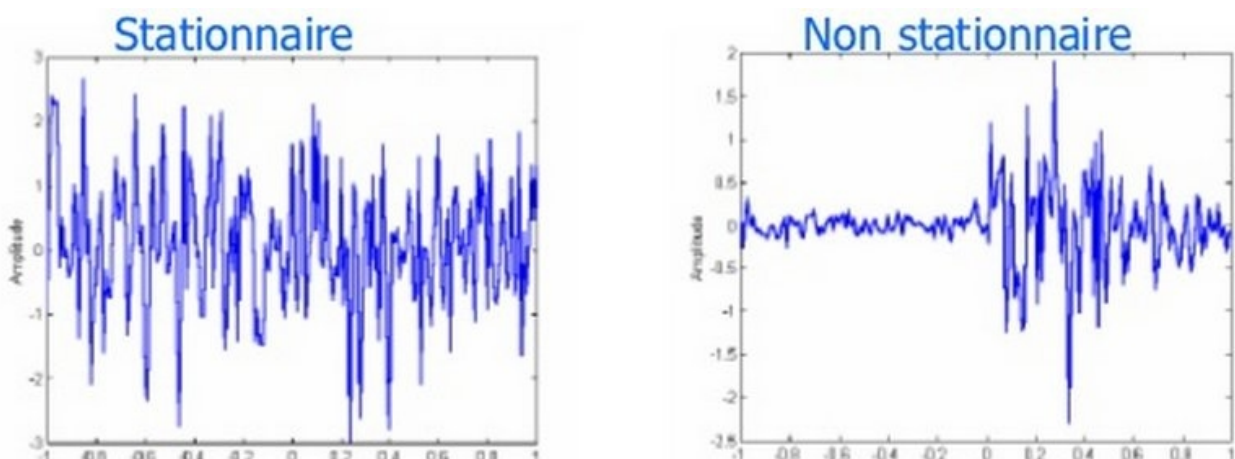
Cette moyenne statistique dépendra du temps si notre signal n'est pas stationnaire. Nous supposons par la suite tous nos signaux stationnaires, par conséquent $\mu_x(t) = \mu_x$. Signalons au passage qu'il existe des signaux stationnaires non ergodiques pour lesquels cette moyenne statistique peut différer de la moyenne expérimentale effectuée sur une unique réalisation temporelle. Pour de tels signaux on ne retrouvera la moyenne statistique qu'en effectuant un grand nombre de réalisations puis une moyenne des moyennes de chaque réalisation. Il s'agit là d'une bizarrerie théorique qui ne nous concernera pas, tous nos signaux pouvant être supposés ergodiques.

Puisque la moyenne statistique des signaux aléatoires est l'équivalent de la moyenne temporelle des signaux déterministes, on aimerait également disposer de l'équivalent pour les signaux aléatoires de la fonction d'auto-corrélation $c_x(\tau)$. La fonction d'auto-corrélation statistique $R_x(t_1, t_2)$:

$$R_x(t_1, t_2) = \iint x_1 x_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

où l'on somme, sur tous les couples de valeurs possibles x_1 à t_1 et x_2 à t_2 , le produit des deux valeurs affecté d'un poids qui est la probabilité d'obtenir la valeur x_1 à t_1 et la valeur x_2 à t_2 est ce que nous recherchons. En effet, comme nous allons le vérifier sur un exemple, le résultat indique le degré d'influence du signal à l'instant t_1 sur le signal à l'instant t_2 (corrélation entre eux) qui, dans le cas qui nous intéresse de signaux stationnaires, ne peut dépendre, de même que $p(x_1 \text{ à } t_1; x_2 \text{ à } t_2)$, que de la différence $\tau = t_2 - t_1$, durée écoulée entre nos deux instants et pas de $(t_2 + t_1)/2$, la situation absolue par rapport à l'origine des temps de ce couple d'instant. Ce $R_x(\tau)$ donne le même résultat que l'estimation expérimentale que l'on pourrait effectuer en enregistrant une réalisation de $x(t)$ (un grand nombre de mesures, autrement dit un échantillonnage très serré de $x(t)$) puis après avoir décalé de τ (d'un certain nombre d'échantillons) par rapport à lui-même ce tableau de valeurs, en calculant de façon numérique l'intégrale $c_x(\tau)$ sur cette réalisation pour chaque τ .

Exemples de signaux aléatoires stationnaires et non stationnaires :



Calcul de la fonction d'auto-corrélation du signal NRZ équiprobable

La méthode de calcul que nous allons suivre maintenant pourrait s'appliquer à tous les formats de transmission que nous avons passé en revue en introduction, pour obtenir leur fonction d'auto-corrélation. Nous ne traiterons donc pas d'autre cas que celui-ci, le plus simple, du NRZ, suffisant

pour comprendre la méthode. De plus, le NRZ est le signal en Bande de Base à partir duquel on obtiendra les modulations d'amplitude et de phase les plus simples en numérique, modulations à deux états. Le résultat que nous allons obtenir maintenant nous sera donc très utile par la suite.

Nous supposons que les deux valeurs que peut prendre le signal NRZ, +V (pour le bit 0) et -V (pour le bit 1) ont la même probabilité de 50%=1/2 et que chaque symbole occupe une durée T. Nous devons alors distinguer deux possibilités :

- $|\tau| = |t_2 - t_1| > T$, nos deux instants sont donc pris sur deux symboles différents (mais qui peuvent éventuellement prendre la même valeur).

Chaque intégrale simple se résume à sommer sur deux possibilités : +V et -V donc l'intégrale double à sommer sur quatre combinaisons : (+V,+V ; -V,-V ; +V,-V ; -V,+V) pour le couple de valeurs x_1, x_2 . La probabilité conjointe $p(x_1 \text{ à } t_1; x_2 \text{ à } t_2)$ s'identifie au simple produit $p(x_1 \text{ à } t_1) \cdot p(x_2 \text{ à } t_2) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ pour tous les couples de valeur, considérant la valeur prise par un symbole indépendante de celle prise par tout autre symbole ce qui est notamment le cas si il y a eu cryptage ou embrouillage du signal par une séquence pseudo-aléatoire.

L'intégrale double devient donc simplement : $R_x(\tau) = (1/4) (V^2 + (-V)^2 + (-V \cdot V) + V \cdot (-V)) = 0$

- $|\tau| = |t_2 - t_1| < T$, nos deux instants peuvent ou non appartenir au même symbole, le hasard seul décide s'il y a eu une transition (passage d'un symbole à un autre pouvant éventuellement prendre la même valeur) entre t_1 et t_2 . La probabilité de transition est $p_T(\tau)$ donc la probabilité d'absence de transition est $1 - p_T(\tau)$ de sorte que la somme des deux probabilités soit certaine : 100%=1. Évidemment plus τ est petit moins il y a de chance de trouver une transition de symbole entre t_1 et t_2 . A la limite $p_T(\tau)$ tend vers zéro quand τ tend vers zéro et, à l'inverse vers 1 quand τ tend vers T, ceci linéairement c'est à dire proportionnellement à τ . Donc $p_T(\tau) = |\tau| / T$ qui, pour $|\tau| < T$, est bien comprise entre 0 et 1 comme il se doit pour une probabilité.

La probabilité conjointe $p(x_1 \text{ à } t_1; x_2 \text{ à } t_2)$ s'identifie désormais au produit $p(x_1 \text{ à } t_1) \cdot p(x_2 \text{ à } t_2) \cdot p_T(\tau)$: probabilité d'obtenir x_1 à t_1 multipliée par la probabilité d'obtenir x_2 à t_2 sachant qu'on a eu x_1 à t_1 . Par exemple, $p(V \text{ à } t_1; -V \text{ à } t_2) = p(V \text{ à } t_1) \cdot p_T(\tau) \cdot p(-V \text{ à } t_2) = 1/4 p_T(\tau)$. En effet, un changement de symbole (de probabilité de transition $p_T(\tau)$) est nécessaire (mais pas suffisant) pour avoir deux valeurs différentes.

Autre exemple, $p(V \text{ à } t_1; V \text{ à } t_2) = p(V \text{ à } t_1) \cdot p_T(\tau) \cdot p(V \text{ à } t_2) + p(V \text{ à } t_1) \cdot (1 - p_T(\tau)) = 1/4 p_T(\tau) + 1/2 (1 - p_T(\tau))$. En effet, cette fois s'ajoute une deuxième contribution correspondant au cas où on a pris nos deux instants sur le même symbole (probabilité $1 - p_T(\tau)$) auquel cas on est sûr que x_2 prend la même valeur que x_1 .

L'intégrale double devient donc :

$$R_x(\tau) = V^2 (1/4 p_T(\tau) + 1/2 (1 - p_T(\tau))) + (-V)^2 (1/4 p_T(\tau) + 1/2 (1 - p_T(\tau))) + (-V \cdot V) 1/4 p_T(\tau) + V \cdot (-V) 1/4 p_T(\tau)$$

Que l'on simplifie en :

$$R_x(\tau) = V^2 (1 - p_T(\tau))$$

En raccordant nos résultats pour $|\tau| > T$ (nul) et $|\tau| < T$ (décroissance linéaire de V^2 à 0) nous retrouvons notre fonction tri() puisque le résultat final est $R_x(\tau) = V^2 \text{tri}(\tau/T)$.

Produit de convolution

Définition et interprétation physique

Nous abordons maintenant une question fondamentale : est-il possible de comprendre et prédire la déformation que va subir un signal $x(t)$, par exemple un symbole, au cours de sa propagation sur le lien de transmission de l'information ? Pour simplifier le problème imaginons que nous connaissions au moins la réponse de notre canal de transmission c'est à dire le signal parvenant au récepteur, lorsque le signal injecté par l'émetteur en entrée est une impulsion étroite de courant que l'on peut modéliser par une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Nous désignons cette réponse par $h(t)$ naturellement appelée réponse impulsionnelle. Peut-on alors prédire quelle sera la réponse $y(t)$ du canal à un signal en entrée $x(t)$ quelconque ? La réponse est que $y(t)$ est effectivement calculable par le produit de convolution de $x(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

défini par

$$y(t) = \int x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Nous devons supposer, ce qui sera toujours le cas en pratique, que notre canal de transmission est un système linéaire, c'est à dire que si notre signal d'entrée est une combinaison linéaire de signaux du type $a x_1(t) + b x_2(t)$, avec des coefficients quelconques a et b , le signal en sortie sera $a y_1(t) + b y_2(t)$ si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont respectivement les réponses à $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Ceci nous assure qu'il y a une « loi de proportionnalité » entre l'entrée et la sortie qui est respectée et que par exemple la sortie n'est pas quelque chose comme le carré ou autre loi de puissance appliquée à l'entrée (ce serait problématique car le carré d'une impulsion de Dirac est mal défini). D'autre part, le système est supposé invariant de sorte qu'on peut convoluer le même inchangé $h(t)$ à tout signal $x(t)$ excitant à tout moment le système.

Obtention du produit de convolution

Nous avons obtenu un peu plus tôt l'égalité :

$$x(t) \delta(t - \tau) = x(\tau) \delta(t - \tau)$$

que nous pouvons intégrer à gauche et à droite sur la variable τ .

$$x(t) \int \delta(t - \tau) d\tau = \int x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Nous avons pu sortir $x(t)$ du signe de l'intégrale à gauche puisqu'il ne dépend pas de la variable d'intégration. Sachant que toute fonction delta a une aire de 1, l'intégrale du côté gauche vaut 1 et peut être omise :

$$x(t) = \int x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

L'interprétation de cette formule est la suivante : notre signal $x(t)$ en entrée peut toujours être considéré comme une superposition additive (l'intégrale est une somme) d'un continuum infini d'impulsions de Dirac de position τ et d'amplitude $x(\tau)d\tau$ parcourant notre signal $x(t)$.

Alors, comme nous savons que la réponse de notre système à $\delta(t)$ est $h(t)$, nous avons la série de déductions suivantes :

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xrightarrow{\text{canal}} h(t) \\ \delta(t-\tau) &\xrightarrow{\text{canal}} h(t-\tau) \\ x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau &\xrightarrow{\text{canal}} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ x(t) = \int x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau &\xrightarrow{\text{canal}} \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau \equiv y(t) \end{aligned}$$

la deuxième ligne utilise l'invariance de notre canal : si l'impulsion est retardée, la réponse impulsionnelle l'est aussi du même décalage temporel τ . La troisième ligne utilise la linéarité : la sortie doit être multipliée par le même coefficient $x(\tau)d\tau$ que l'entrée. A la quatrième ligne on a intégré de part et d'autre grâce à la linéarité : à la somme des entrées répond la somme des sorties. La sortie $y(t)$ est donc bien le produit de convolution $x(t)*h(t)$ tel que nous l'avons défini.

Calcul en pratique

Soulignons au passage que, même si elles se ressemblent beaucoup, l'interprétation physique de l'intégrale du produit de convolution est très différente de celle de la fonction d'inter-corrélation (qui en adoptant les mêmes noms de variable serait ici $\int x(\tau)h(t+\tau)d\tau$) à cause du signe moins supplémentaire sur la variable d'intégration. Par contre en pratique le calcul du produit de convolution implique seulement le remplacement de $h(t+\tau)$ (fonction $h(\tau)$ décalée dans le temps de $-t$) par $h(t-\tau)=h(-(\tau-t))$ (fonction $h(\tau)$ que l'on retourne symétriquement par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir $h(-\tau)$ avant de la décaler dans le temps de $+t$ en remplaçant τ par $\tau-t$). Cf [ggb5](#) pour un exemple visuel. Un signal tel que $x(t)=\text{rect}(t/T)$ étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est dit pair et satisfait $x(t)=x(-t)$ si bien que le retournement est dans ce cas superflu et $x(t)*x(t)$ donne le même résultat que la fonction d'auto-corrélation de $x(t)$ (les surfaces produites après décalage de t ou $-t$ sont les mêmes : cf [animation wikipedia](#)). On retiendra donc finalement que $\text{rect}(t/T)*\text{rect}(t/T)=T \text{tri}(t/T)$.

Propriétés et usages

- Commutativité

Le produit de convolution est commutatif $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$ pour toutes fonctions $x(t)$ et $h(t)$ ce que l'on vérifie simplement en effectuant le changement de variable $\tau = t - \kappa$ dans l'intégrale de définition.

- Identité

$$\delta(t)*x(t)=x(t)$$

Imaginons un canal de réponse impulsionnelle $x(t)$. Sa réponse à une impulsion doit être le terme de gauche mais aussi le terme de droite par définition.

- Translation

$$\delta(t-t_0)*x(t)=x(t-t_0)$$

Imaginons un canal de réponse impulsionnelle $x(t)$. La réponse à une impulsion retardée de t_0 doit aussi être retardée de t_0 .

- Répétition

$$\delta_T(t)*x(t)=\text{Rep}_T(x(t))$$

Imaginons un canal de réponse impulsionnelle $x(t)$, sa réponse à un peigne de Dirac, succession périodique d'impulsions de Dirac, doit être la somme des réponses avancées ou retardées à chacune de ses impulsions avancées ou retardées, autrement dit, la répétition de $x(t)$ à intervalles réguliers T .

Nous disposons donc avec la convolution d'un outil mathématique pour représenter les opérations consistant à traduire un signal dans le temps ou à le répéter (mais attention à bien prendre en compte l'éventuel recouvrement entre les différents motifs répétés), et les utiliser dans les calculs. En répétant n'importe quel motif périodiquement il est aisé de construire un signal périodique et réciproquement tout signal périodique $x(t)$ peut être considéré comme la répétition d'une période $x_T(t)$ de ce signal, c'est à dire la convolution $\delta_T(t) * x_T(t)$.

Pour finir ce chapitre nous pouvons considérer que nous avons maintenant à notre disposition une boîte à outils complète et performante nous permettant de fabriquer une grande variété de signaux déterministes à partir des briques de base que sont les fonctions constante, $\cos()$, $\text{rect}()$, $\delta()$, $\delta_T()$, $\text{sinc}()$, $\text{tri}()$ que l'on sait traduire, répéter, dilater, amplifier/atténuer, et composer entre elles par les opérations $+$, $-$, $.$ et $*$ afin de modéliser assez fidèlement la plupart des signaux réels déterministes usuels notamment les symboles transmis sur une ligne de transmission de l'information.

Analyse spectrale

Objectifs

Toujours dans l'objectif de prédire le signal de sortie déformé $y(t)$ pour tout signal $x(t)$ en entrée de notre canal de transmission, nous allons nous munir d'un outil complémentaire de la convolution : l'analyse spectrale. L'idée première de la convolution était en gros de décomposer notre signal d'entrée $x(t)$ en impulsions de Dirac, et connaissant la réponse $h(t-\tau)$ de notre canal à chacune de ces impulsions $\delta(t-\tau)$, il s'agissait de sommer toutes ces réponses superposées en sortie pour obtenir $y(t)$. Ce que nous allons faire maintenant c'est plutôt décomposer notre $x(t)$ en fonctions sinusoïdales car celles-ci ont une propriété remarquable : à la traversée d'un système linéaire comme l'est notre canal elles ne se déforment pas. Elles demeurent au contraire des sinusoïdes de même période (donc de même fréquence) dont seules l'amplitude et la phase seront éventuellement modifiées :

$$A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \xrightarrow{\text{canal}} A' \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi'\right)$$

La loi conduisant de $A(f); \varphi(f)$ à $A'(f); \varphi'(f)$ (nous verrons en effet qu'elle dépendra de $f=1/T$) sera tout ce qu'il nous faudra connaître pour obtenir toutes les sinusoïdes composant notre signal après traversée du canal et sommer toutes ces réponses superposées en sortie pour obtenir $y(t)$. Notre premier objectif est donc d'apprendre à décomposer un signal en sinusoïdes.

Séries de Fourier

Définition : Nous verrons que n'importe quel signal déterministe peut être décomposé en sinusoïdes, mais commençons par traiter le cas plus simple et intuitif des signaux périodiques. Tout signal périodique $x(t)$ de période T et fréquence $f_T=1/T$ peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de sinusoïdes appelée série de Fourier :

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

Les périodes T/n (resp fréquences $f_n = n f_T$) de ces sinusoïdes sont donc des sous multiple entiers (resp multiples entiers) de la période T (resp fréquence f_T) de notre signal $x(t)$.

Les coefficients de Fourier a_n, b_n représentent donc les poids respectifs des contributions de fréquence f_n à la somme, appelées fondamentale pour $n=1$ et harmoniques pour $n>1$ tandis que C_0 peut être considéré comme le poids d'une composante $\cos()$ de fréquence nulle ($n=0$). Cette constante est parfois appelée composante continue en référence au courant électrique continu.

Ces coefficients sont tout ce dont nous avons besoin pour reconstituer $x(t)$. Les connaître et les représenter sur un graphe en fonction de f_n est juste une autre façon de nous représenter notre signal : $x(t)$ est la représentation temporelle usuelle tandis que les coefficients en fonction de f_n constituent la représentation fréquentielle encore appelée spectre. L'une ou l'autre sont plus ou moins pratiques à utiliser en fonction des problèmes à résoudre.

On dispose, de plus, des formules de calcul des coefficients de Fourier pour tout signal $x(t)$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

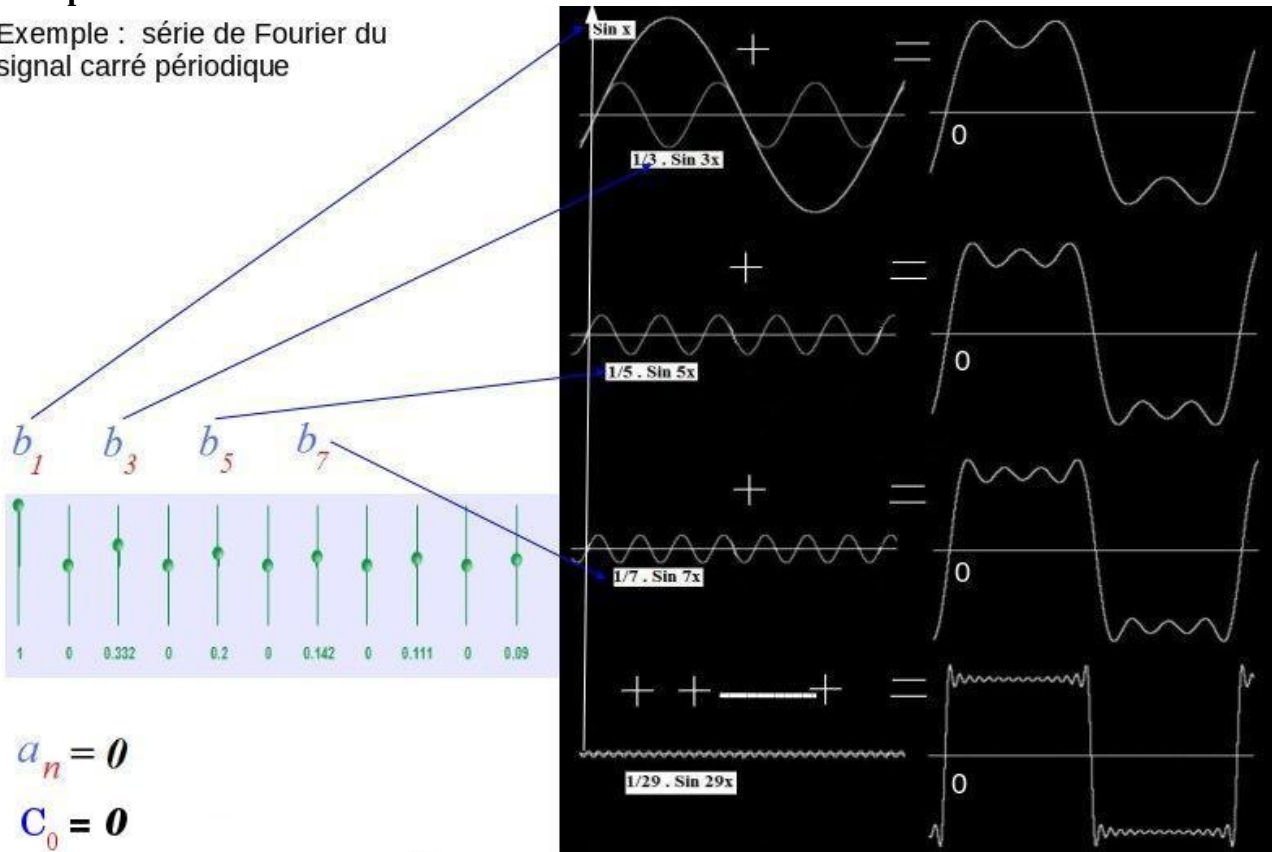
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

où t_0 , point de départ de l'intervalle d'intégration couvrant une période, peut être choisi arbitrairement. La formule de définition de la série de Fourier permet ainsi de passer de la représentation fréquentielle à la représentation temporelle (c'est la synthèse harmonique), tandis que ces dernières formules fournissent la réciproque (l'analyse harmonique). Nous reconnaissons la formule de C_0 comme étant celle de la moyenne d'un signal périodique, donc un signal de valeur moyenne nulle n'a pas de composante constante (on dit encore continue, ou de fréquence nulle) dans son spectre.

Exemple

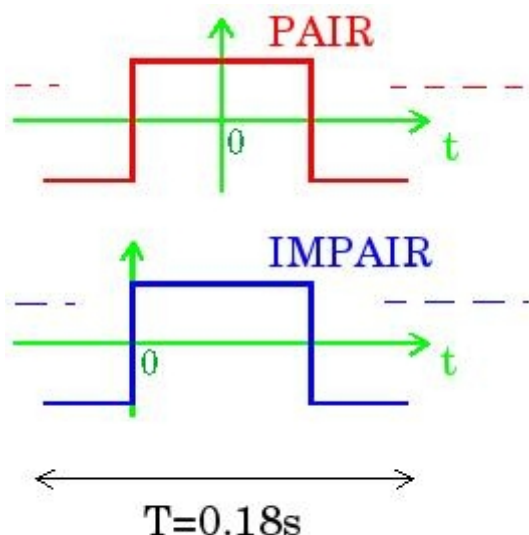
Exemple : série de Fourier du signal carré périodique



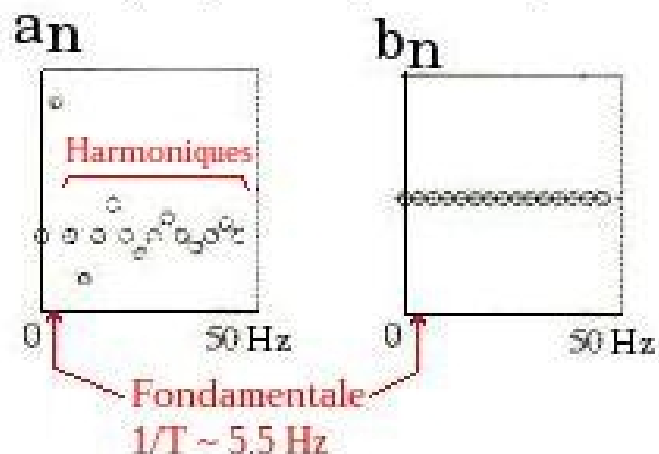
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t)] + C_0$$

Le calcul des coefficients de Fourier dans le cas du signal carré périodique impair d'amplitude 1 est simple lorsque l'on maîtrise les techniques d'intégration des fonctions usuelles. Il a été effectué en exercice et sur la figure ci-dessus figurent à gauche le résultat, la représentation fréquentielle, où l'on remarque que tous les coefficients a_n des $\cos()$ sont nuls tandis que les b_n des $\sin()$ sont nuls pour n pair et valent $1/n$ pour n impair. A droite le résultat de la sommation successive des premières sinusoïdes (jusqu'à la 29ème) où l'on constate qu'effectivement la somme de sinusoïdes reproduit de mieux en mieux le signal carré périodique.

Les $\cos()$ sont des fonctions paires ce qui signifie qu'elles sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : elles vérifient $f(-t) = f(t)$. Les $\sin()$ au contraire sont des fonctions impaires c'est à dire symétriques par rapport à l'origine donc vérifiant $f(-t) = -f(t)$. Le signal $x(t)$ que nous avons décomposé en série de Fourier est quant à lui impair et nous constatons que seuls les $\sin()$ également impairs participent à sa somme puisque tous les a_n sont nuls. Ce résultat est général : pour tout signal pair (resp impair), les b_n (resp a_n) sont nuls. Par exemple, pour le signal carré pair qui s'obtient à partir de l'impair par simple décalage temporel (ou redéfinition de l'origine des temps) ce sont les b_n qui sont nuls.



Spectre du Signal périodique carré pair



Les parties les plus difficiles à reproduire du signal carré sont évidemment les fronts montant et descendant de pente infinie que l'on ne peut approcher que par des composantes de plus en plus hautes fréquences. C'est pourquoi le fait d'avoir tronqué la sommation de la série au 29^{ème} terme se traduit par une pente finie et des oscillations au voisinage des fronts à reproduire. Cf [ggb6](#) pour une animation permettant d'observer la somme d'un plus grand nombre de termes pour un signal périodique en dents de scie.

Autres représentations :

Il existe plusieurs autres versions du développement en série de Fourier qui peuvent être obtenues de proche en proche à partir de la première.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(2\pi f_n t) + b_n \sin(2\pi f_n t) \right]$$

Réel

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$$

Complexe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i 2\pi f_n t}$$

- Dans la première le coefficient C_0 est devenu a_0 et l'on somme en partant de $n = 0$, sachant que $b_0 = 0$.

- Dans la deuxième on a utilisé le fait que l'on peut toujours réécrire tout terme $a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$ sous la forme $\alpha \cos(x + \phi)$. Ainsi, on n'a plus qu'une somme de $\cos()$ mais on a toujours deux paramètres, α_n et ϕ_n qui doivent remplacer a_n et b_n dans la représentation fréquentielle. Le premier paramètre représente l'amplitude, c'est à dire le véritable poids physique de la contribution de fréquence f_n à la somme tandis que ϕ_n représente le déphasage de cette sinusoïde lié à son décalage temporel.

- Pour obtenir la troisième, la première étape est de réécrire chaque $\cos(x)$ sous la forme complexe $(\exp[ix] + \exp[-ix])/2$, ce qui fait apparaître pour chaque $\exp[i 2\pi f_n t]$ de fréquence $f_n =$

$n f_T$, une autre exponentielle $\exp[-i 2 \pi f_n t]$ de fréquence $-f_n = -n f_T$ qui est négative ($n > 0$). La deuxième étape est de remplacer chaque fréquence $-f_n = -n f_T$ où $n > 0$ par $f_n = n f_T$ où $n < 0$ pour rendre la formule plus compacte, avec une seule exponentielle mais n variant de $-\infty$ à $+\infty$. Le terme de phase $\exp[i\varphi_n]$ de chaque exponentielle qui semble avoir disparu a été au final réabsorbé dans la définition des nouveaux coefficients de Fourier que sont les c_n . Ces paramètres sont maintenant des nombres complexes qui ne sont rien d'autre en réalité que des couples de nombres réels avec une loi de multiplication un peu particulière. Les deux paramètres α_n et φ_n ont en effet été remplacés par deux nouveaux paramètres : le module et la phase du nombre complexe c_n que l'on note en général $|c_n|$ et Φ_n . Comme tout nombre complexe, c_n s'écrit sous la forme $c_n = |c_n| \exp[i \Phi_n]$ ce qui permet de multiplier facilement les nombres complexes entre eux (les modules se multiplient, les phases s'ajoutent).

Ce qu'il faut comprendre c'est que toutes ces réécritures et détails techniques ne font rien apparaître de physiquement pertinent. Elles ne sont introduites que par commodité pour les calculs. En particulier les fréquences négatives de la dernière expression ne doivent pas être interprétées physiquement (il n'existe aucun phénomène pouvant se produire un nombre négatif de fois par seconde). Elles n'émergent que parce qu'on a introduit des exponentielles qui sont des nombres complexes et chaque exponentielle complexe n'a pas non plus de sens physique prise isolément puisqu'elle n'est pas un nombre réel. Néanmoins, la dernière écriture est celle qui s'impose pour le moment car elle est plus compacte et simplifie les calculs formels et pratiques.

De même que nous avons des formules pour calculer les a_n et b_n , il y en a pour les α_n et φ_n et finalement pour les c_n :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt$$

Le spectre devra donc comporter deux graphes : celui de $|c_n|$ en fonction f_n et celui de Φ_n en fonction f_n qui ont gardé essentiellement la même signification physique que α_n et φ_n : $|c_n|$ est le poids physique de la contribution de fréquence f_n à la somme tandis que Φ_n représente son déphasage (décalage temporel).

Les n négatifs ayant été générés artificiellement par le passage aux notations complexes, les paramètres de n négatifs n'apportent aucune information supplémentaire par rapport à ceux de n positifs. On peut montrer que :

- $|c_n| = |c_{-n}|$ (le graphe du module est pair)
- $\Phi_{-n} = -\Phi_n$ (le graphe de la phase est impair)

Pour un signal $x(t)$ pair, les c_n sont réels, et dans ce cas il suffit de représenter directement ces coefficients plutôt que leur module et leur phase.

Exemple :

Le peigne de Dirac est un signal périodique pair pour lequel le calcul des c_n s'avère particulièrement simple :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-i2\pi f_n t} dt$$

Sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$ on ne trouve qu'une seule impulsion du peigne, par conséquent on a remplacé le peigne $\delta_T(t)$ par $\delta(t)$. Nous pouvons alors utiliser une fois de plus $x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$ avec $\tau = 0$ soit $x(t)\delta(t) = x(t=0)\delta(t)$ pour éliminer l'exponentielle de zéro qui vaut 1 sous le signe intégral. Alors, l'intégrale d'un Dirac valant toujours 1 on trouve $c_n = 1/T$. On écrit donc finalement la série de Fourier du peigne :

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi f_n t}$$

Transformées de Fourier

Définition :

La capacité d'une somme de sinusôides à reproduire un signal périodique de forme quelconque était déjà impressionnante. Pourtant on peut faire bien mieux encore : reproduire un signal non périodique, comme par exemple notre `rect()` par une somme de sinusôides. Dans ce cas, comme il n'y a pas de fréquence fondamentale $f=1/T$, il n'y a pas non plus de fréquences multiples $f_n=n/T$ devant jouer un rôle particulier comme dans le cas des signaux périodiques. Toutes les fréquences du continuum doivent pouvoir participer à la somme qui n'est plus discrète (un \sum \square) mais une intégrale, $\int \square$, sur toutes les fréquences f .

La généralisation que constitue le passage de la somme discrète à la somme continue est immédiate :

$x(t)$ périodique réel de fréquence $f=1/T$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overset{\text{Complexe}}{\downarrow} c_n e^{i 2\pi f_n t}$$

$$f_n = n/T$$

$x(t)$ quelconque réel

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{Complexe}}{\uparrow} X(f) e^{i 2\pi f t} df \quad (2)$$

f quelconque

Le coefficient de Fourier c_n pour chaque fréquence discrète n/T est ainsi devenu une fonction $X(f)$ de la variable f continue, la transformée de Fourier qui nous est donnée par la formule d'analyse de Fourier (1) :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i 2\pi f t} dt \quad (1)$$

$$x(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{(1)} \\ \xleftarrow{(2)} \end{array} X(f)$$

très similaire à la formule inverse (2) de synthèse de Fourier (on permute juste les rôles de f et t et on introduit un signe moins dans l'exponentielle).

Les transformées de Fourier permettent d'obtenir le spectre d'un signal quelconque, y compris donc

périodique, et nous vérifierons que, dans ce cas particulier, $X(f)$ est discret, et nous retrouvons les séries de Fourier. Par conséquent les formules (1) et (2) sont les plus générales et en définitive les seules à retenir. En général, il faudra deux graphes, celui du module et celui de la phase de $X(f)$ pour avoir l'information spectrale complète, sauf pour un $X(f)$ réel, auquel cas le graphe de $X(f)$ suffira. Comme pour les c_n , le graphe du module de $X(f)$ est pair et celui de sa phase est impair.

Propriétés :

Les techniques de calcul intégral et complexe permettent de calculer la TF pour toutes les fonctions usuelles $x(t)$. Nous pouvons cependant nous en passer, si nous connaissons les TF des signaux élémentaires, briques de base à partir desquelles nous avons vu comment (en combinant ces éléments entre eux par les opérations, +, -, ., * et en effectuant des opérations basiques de translation, amplification/atténuation, dilatation temporelle) construire une grande variété de signaux. Il nous faut pour cela établir ce que deviennent les TF sous de telles opérations :

- Linéarité : la TF d'une combinaison linéaire de signaux $x(t)$ et $y(t)$ est la combinaison linéaire des TF avec les mêmes coefficients a et b , ce qui se démontre trivialement à partir de la formule de définition (1).

$$ax(t) + by(t) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} aX(f) + bY(f)$$

Ceci inclue donc ($b=0$) l'amplification /atténuation d'un unique signal par un facteur a .

- Translation temporelle:

$$x(t-t_0) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} X(f) \exp[-i 2 \pi f t_0]$$

qui se démontre également trivialement à partir de (2) en utilisant $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$. Nous savons depuis le début du cours qu'une translation temporelle équivaut à un déphasage $- 2 \pi f t_0$ dans le cas d'un signal sinusoïdal de fréquence f . Il n'est donc pas étonnant que chaque exponentielle complexe de fréquence f entrant dans la composition de $x(t)$ se déphase de $- 2 \pi f t_0$ (notons qu'un même décalage temporel induit un déphasage, « nombre de tours 2π », qui n'est pas le même pour toutes les fréquences mais logiquement proportionnel à f).

Les formules (1) et (2) se déduisant l'une de l'autre en permutant les rôles de f et t et en changeant le signe dans les exponentielles complexes, on obtient immédiatement une règle analogue pour la translation fréquentielle :

$$x(t) \exp[i 2 \pi t f_0] \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} X(f - f_0)$$

- Dilatation/contraction temporelle :

$$x(\lambda t) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} 1/|\lambda| X(f/\lambda)$$

de démonstration immédiate à partir de (1) par changement de variable $t=t'/\lambda$ dans l'intégrale. Une dilatation temporelle ($\lambda < 1$) du signal induit donc une contraction et atténuation proportionnelles du spectre et inversement pour $\lambda > 1$.

- Théorème de la convolution :

Un peu plus délicat à démontrer (Théorème de Fubini), il établit que la TF d'une convolution est le produit des TF et réciproquement :

$$x(t)*y(t) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} X(f).Y(f)$$

$$x(t).y(t) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} X(f)*Y(f)$$

Spectres des signaux élémentaires

Il ne nous reste plus qu'à établir les TF de nos signaux élémentaires.

•

$$\text{rect}(t/T) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} T \text{ sinc}(T.f)$$

Démonstration :

$$X(f) = \int \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi ft} dt$$

car $\text{rect}(t/T)=1$ dans l'intervalle $[-T/2, T/2]$ et est nul à l'extérieur, et on intègre

$$X(f) = \frac{[e^{-i2\pi ft}]_{-T/2}^{T/2}}{-i2\pi f} = \frac{e^{i2\pi fT/2} - e^{-i2\pi fT/2}}{i2\pi f} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{ sinc}(Tf)$$

Sachant que la primitive de $\exp(at)$ est $(1/a).\exp(at)$ et que $\sin x = (\exp(ix) - \exp(-ix))/2i$

•

$$\delta(t) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} 1(f)$$

s'obtient en faisant tendre T vers zéro à gauche et à droite (après avoir multiplié par $1/T$ en exploitant la linéarité de la TF) de :

$$(1/T) \text{ rect}(t/T) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} \text{ sinc}(T.f)$$

ce qui transforme le signal en rectangle infiniment fin infiniment haut de surface 1, autrement dit $\delta(t)$ ayant donc comme TF, la limite quand T tend vers zéro de $\text{sinc}(Tf)$, un sinus cardinal qui se dilate à l'infini et tend donc vers la fonction constante 1 pour tout f .

•

$$1(t) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

s'obtient de même.

•

$$\delta(t-t_0) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} \exp[-i 2 \pi f t_0]$$

qui découle directement de la translation temporelle de t_0 appliquée à $\delta(t)$.

$$\exp[i 2 \pi f_0 t] \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} \delta(f-f_0)$$

qui découle directement de la translation fréquentielle de f_0 appliquée à $\delta(f)$.

- Ayant à notre disposition la TF d'exponentielle complexe à partir de laquelle on peut exprimer la fonction $\cos()$, puisque $\cos(x) = (\exp(ix) + \exp(-ix))/2$, on obtient sans difficulté en utilisant la linéarité de la TF :

$$\cos(2 \pi f_0 t) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} (\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))/2$$

- Nous avons déjà obtenu la série de Fourier du signal périodique qu'est le peigne de Dirac

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{i2\pi f_n t} \quad (I)$$

somme discrète qui doit s'identifier à la somme continue

$$\delta_T(t) = \int X(f) e^{i2\pi f t} df \quad (II)$$

si $X(f)$ est la TF du peigne.

Cela n'est possible que si $X(f)$ est lui même un peigne dont les impulsions sont d'amplitude $1/T$ et espacées de $1/T$ qui s'écrit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(f-f_n)$, chaque impulsion $\delta(f-f_n)$ permettant de remplacer f par f_n dans l'exponentielle de (II) qui ainsi peut être sortie de l'intégrale. L'intégrale finale vaut comme toujours 1 pour chaque impulsion de Dirac. On retrouve donc bien (I) à partir de (II). En conclusion :

$$\delta_T(t) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T} \cdot \delta_{\frac{1}{T}}(f)$$

Spectre des signaux périodiques

Ce que l'on vient de vérifier dans le cas du peigne, à savoir que le c_n de la série de Fourier correspond à un $c_n \delta(f-f_n)$ de la transformée de Fourier ($c_n=1/T$ pour le peigne) est vrai pour n'importe quel signal périodique comme nous allons le vérifier maintenant. Autrement dit, le spectre $X(f)$ dans ce cas n'est constitué que d'impulsions de Dirac d'amplitudes complexes correspondant aux c_n . On dit que les signaux périodiques possèdent un spectre de raies.

En effet, nous savons que tout signal périodique $x(t)$ de période T peut être considéré comme la répétition à intervalles T du motif d'une unique période $x_T(t)$, répétition que l'on exprime grâce à la convolution :

$$x(t) = x_T(t) * \delta_T(t)$$

dont le spectre nous est donné par le théorème de la convolution :

$$X(f) = X_T(f) \cdot \frac{1}{T} \cdot \delta_{\frac{1}{T}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_T(f_n) \cdot \delta(f-f_n) \quad III$$

où $X_T(f)$ est le spectre de $x_T(t)$. Le résultat est donc la multiplication par un peigne de Dirac de $1/T \cdot X_T(f)$, c'est à dire son échantillonnage à toutes les fréquences $f_n = n/T$ multiples de la fondamentale $1/T$. Le spectre $X(f)$ est donc bien entièrement constitué d'impulsions de Dirac et les

valeurs, $1/T \cdot X_T(f_n)$ de ces échantillons ne sont donc rien d'autre que les c_n de la série de Fourier puisque partant par ailleurs de l'expression de la série de Fourier de $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi f_n t}$$

On obtient par transformation de Fourier de part et d'autre du signe égal (on a établi plus haut la TF d'une exponentielle complexe)

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - f_n)$$

que l'on peut identifier à (III).

Exemples de TF

- Le spectre de $x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi f_0 t)$ est simple à obtenir en exploitant la linéarité et les spectres connus que sont ceux de la constante et du $\cos()$. On obtient une impulsion de Dirac de hauteur 1 à la fréquence nulle encadré par les impulsions de Dirac du $\cos()$ également de hauteur 1 (à cause du facteur 2) aux fréquences f_0 et $-f_0$.

Si l'on continue de rajouter des $\cos()$ de fréquences multiples de f_0 on tend vers une série $x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi f_0 t) + 2 \cos(4\pi f_0 t) + 2 \cos(6\pi f_0 t) + \dots$ et dans le spectre $X(f)$ sont rajoutés alors une paire de Dirac aux fréquences, $+2f_0$, $+3f_0$, ... et ainsi de suite de sorte que le spectre à la limite sera une infinité d'impulsions de Dirac espacées de f_0 , c'est à dire un peigne de Dirac $\delta_{f_0}(f)$. Ce peigne devrait donc être la transformée d'un autre peigne $1/f_0 \cdot \delta_{1/f_0}(t)$ d'impulsions espacées de $T=1/f_0$ ce que l'on vérifie visuellement sur l'animation [ggb7](#) : au fur et à mesure que l'on rajoute des $\cos()$, l'interférence entre ceux ci est destructive partout sauf aux instants multiples de T où on observe la formation d'impulsions de plus en plus fines et hautes tendant donc vers des impulsions de Dirac.

- L'animation [ggb8](#) revient sur le signal périodique rectangle pair (période T , rectangle de largeur T'). On sait qu'il a un spectre de raies qui doit être d'après (III) une succession d'impulsions de Dirac espacées de $1/T$ et d'amplitudes prises sur $\frac{1}{T} \cdot X_T(f)$ c'est à dire sur

$$\frac{1}{T} T' \text{sinc}(T' f)$$

. L'animation montre le signal et le spectre superposés : il y a donc en réalité deux axes des abscisses superposés, l'un pour le temps et l'autre pour la fréquence. On peut voir évoluer le signal et le spectre lorsque T' varie, T étant maintenu constant. On observe que seule l'enveloppe des raies (qui est la TF de $\text{rect}(t/T')$) s'amplifie/atténue proportionnellement à T' et se dilate ou se contracte dans le temps en raison inverse de la variation de T' , un résultat fondamental et général que nous avons annoncé plus tôt.

En faisant croître T à T' constant on peut augmenter à l'infini la densité de raies et se rapprocher de la forme de la TF continue d'un unique rectangle, les autres étant repoussés à l'infini.

L'animation propose aussi de faire varier T et T' d'un même facteur. L'espacement $1/T$ entre les raies du spectre discret varie alors aussi en sens inverse tandis que l'amplitude T/T' de l'« enveloppe » reste fixe. Ce résultat est troublant car nous avons montré plus haut que l'amplitude de la TF d'un signal $x(t/a)$ est proportionnelle à a . Ce n'est pas le cas ici car, contrairement aux apparences, le signal $x(t)$ que nous obtenons en faisant varier T et T' d'un même facteur a dans cette animation, n'est pas $x(t/a)$! Le problème est que notre signal est construit par convolution avec un peigne comme tout signal périodique. Or en jouant sur l'écartement T des impulsions du peigne, on ne dilate pas véritablement le peigne au sens où nous l'avons défini plus haut puisque ce n'est pas le peigne $\delta_T(t/a)$ que nous produisons. Si c'était le cas une dilatation d'un facteur $a > 1$, dilaterait les impulsions du peigne elles mêmes, et par exemple $\delta(t)$ qui est une de ces impulsions devrait être remplacée par $\delta(t/a)$

qui n'est en fait que $a.\delta(t)$. Cela aurait donc pour effet d'amplifier la TF du facteur supplémentaire a (et le signal aussi d'ailleurs).

- Le spectre du signal triangulaire $\text{tri}(t/T)$ nous est donné directement par le théorème de la convolution. Partant de :

$$\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \frac{1}{T}$$

on obtient le spectre voulu en effectuant la TF de la convolution à droite de l'égalité, qui n'est rien d'autre que le produit des TF des $\text{rect}(t/T)$ divisé par T :

$$\text{tri}(t/T) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} T \text{sinc}^2(Tf)$$

Le spectre d'un triangle, variant comme le carré d'un sinus cardinal, est donc beaucoup plus amorti en fréquences que le spectre d'un rectangle, variant comme un simple sinus cardinal ce qui est logique : ce sont les fronts abrupts des rectangles qui nécessitent une plus forte contribution de hautes fréquences dans le spectre pour être bien reproduits.

- Imaginons un analyseur de spectre devant afficher à l'écran le spectre d'un signal électrique $\cos(2\pi f_0 t)$ piqué sur une paire torsadée. En théorie, ce sont deux Diracs de fréquences f_0 et $-f_0$ et l'analyseur devrait donc afficher des pics à ces fréquences. En réalité, l'analyseur n'affiche que les fréquences physiques qui sont positives. D'autre part l'analyseur ne peut pas suivre l'évolution du $\cos()$ du début à la fin des temps et doit appliquer une fenêtre temporelle de durée T si possible grande par rapport à la période du $\cos()$. Donc ce que calcule l'analyseur n'est alors pas le spectre du signal mais celui du signal multiplié par $\text{rect}(t/T)$. Par conséquent

$$\text{rect}(t/T) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} T \text{sinc}(Tf) * (\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))/2$$

Le pic attendu à l'écran s'observera donc sous la forme d'un sinus cardinal de largeur $1/T$. La durée du fenêtrage doit être grande pour que ce pic soit étroit.

Théorème d'échantillonnage de Shannon

A quelle fréquence f_e (période $T_e = 1/f_e$) faut-il échantillonner un signal $x(t)$ avant sa transmission pour que le récepteur soit capable de retrouver la forme exacte du signal analogique d'origine passant par ces échantillons ? Le Théorème d'échantillonnage de Shannon énonce qu'il faut un f_e supérieur au double de f_{\max} , la fréquence maximale du spectre. En effet, le signal échantillonné $x_e(t)$ n'est rien d'autre que le produit :

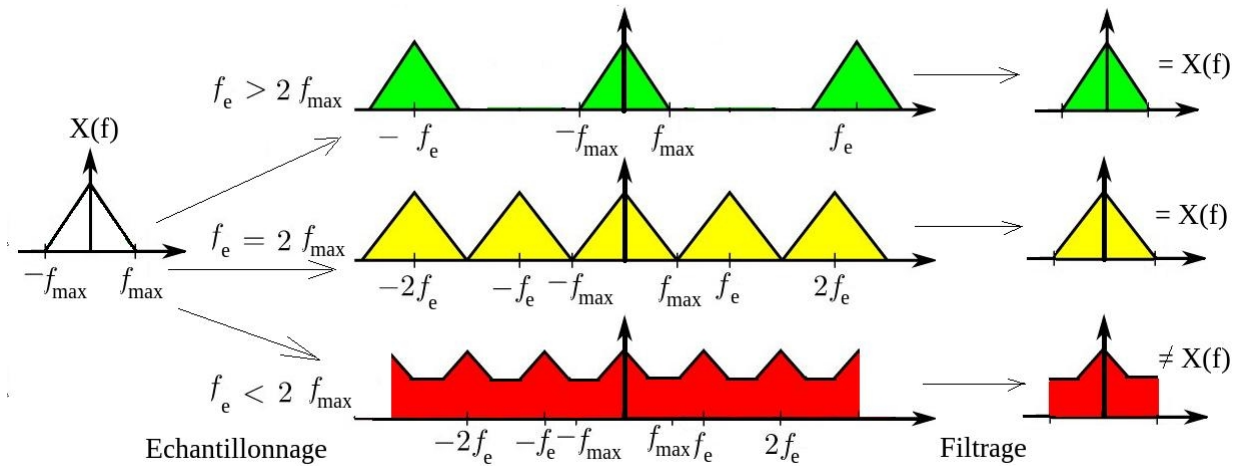
$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)$$

dont la TF $X_e(f)$ s'obtient par le théorème de la convolution.

$$X_e(f) = X(f) * f_e \delta_{f_e}(f)$$

Cette formule signifie que $X_e(f)$ est, à un facteur près, juste la répétition de $X(f)$ à intervalles réguliers f_e . Être capable de reconstituer $x(t)$ à partir de $x_e(t)$ signifie exactement la même chose qu'être capable de retrouver $X(f)$ à partir de $X_e(f)$. Mais le problème posé dans le domaine fréquentiel va s'avérer beaucoup plus simple à résoudre que celui difficile de la recherche d'une courbe passant par des échantillons dans le domaine temporel. Dans le domaine fréquentiel, en effet, il s'agit juste de supprimer de $X_e(f)$ toutes les répliques de $X(f)$ pour ne garder que $X(f)$ et ceci, comme on le verra plus en détails au prochain chapitre peut s'effectuer à l'aide d'un simple filtre coupant toutes les fréquences en dehors de celles constituant le spectre de $X(f)$. C'est ainsi que si le spectre de $X(f)$ s'étend entre 0 et f_{\max} , il suffira d'un filtre passe-bas coupant toutes les fréquences au-delà de f_{\max} pour récupérer en sortie du filtre, $X(f)$ donc $x(t)$, le signal qui passait par les

échantillons. Ceci ne fonctionne cependant que si les répliques sont bien séparées et ne se sont pas mélangées en débordant les unes sur les autres ce qui se produit inévitablement si la séparation entre $X(f)$ et sa première réplique, c'est à dire f_e est inférieure à $2f_{\max}$ comme le montre la figure suivante :



Dans ce cas le filtre ne permettra pas de récupérer le spectre de $x(t)$ mais un spectre modifié. Il faut donc que $f_e \geq 2f_{\max}$ CQFD.

Spectre d'un signal aléatoire

Bien sûr, il faut connaître $x(t)$ pour calculer $X(f)$ à l'aide de (1) ce qui semble interdire l'obtention d'un spectre pour des signaux aléatoires. Cependant pour ces signaux on peut considérer une réalisation temporelle particulière sur laquelle on aura effectué un échantillonnage très fin. Ces échantillons sont alors utilisés en input du calcul des échantillons d'une Transformée de Fourier dite Discrète, TFD. La TFD qui (cf Wikipedia) permet d'évaluer une représentation spectrale également discrète (spectre échantillonné) d'un signal discret (signal échantillonné) sur une fenêtre de temps finie (échantillonnage borné dans le temps), est utilisée par les instruments comme les analyseurs de spectre pour afficher en temps réel le spectre du signal capturé par les électrodes et de façon générale ils sont à la base d'algorithmes de calcul appelés FFT (Fast Fourier Transform) adaptés aux processeurs numériques et optimisés en rapidité. C'est ainsi que l'on peut obtenir en temps réel des spectres de signaux aussi chaotiques qu'un bruit thermique.

Spectre de puissance

Nous disposons maintenant des outils nécessaires pour calculer les spectres de signaux déterministes très divers. Est il possible d'adapter ces méthodes au cas de signaux aléatoires pour obtenir des spectres sans passer par une réalisation temporelle et échantillonnage rapide de ces signaux (paragraphe précédent) mais calculés théoriquement en exploitant uniquement notre connaissance de la loi de probabilité de ces signaux ? C'est en effet possible en ce qui concerne le spectre de puissance que nous allons maintenant définir.

Considérons pour commencer un signal déterministe $x(t)$. Nous avons appris que la moyenne de $x^2(t)$ sur un intervalle temporel donné était sa puissance, donc à chaque instant $x^2(t)$ représente la puissance instantanée, énergie par unité de temps du signal dont l'intégrale temporelle nous donne son énergie W . On montre (théorème de Parseval) que :

$$W = \int x^2(t) dt = \int |X(f)|^2 df$$

Autrement dit, l'énergie totale s'obtient également en intégrant $|X(f)|^2$ en fréquence ce qui signifie que $|X(f)|^2$ est de l'énergie par unité de fréquence, appelée densité spectrale d'énergie. Le graphe de

$|X(f)|^2$ est donc ce que l'on appelle un spectre d'énergie, qui nous indique comment l'énergie totale de notre signal est distribuée en fréquences. Pour des signaux d'énergie infinie, la densité spectrale d'énergie est aussi infinie donc non exploitable de sorte qu'on est, comme toujours, contraint de travailler avec des puissances obtenues en divisant par la durée de l'intervalle d'intégration T :

$$P = \frac{1}{T} \int x^2(t) dt = \int \frac{|X(f)|^2}{T} df$$

où $|X(f)|^2 / T$ est la densité spectrale de puissance $\Gamma(f)$. Ce type de spectre (densité spectrale d'énergie ou de puissance) est de loin le plus représenté et utilisé et nous aimerions en disposer aussi pour les signaux aléatoires malheureusement $X(f)$ ne peut pas être calculé pour un signal sans connaître $x(t)$. On a heureusement un autre voie pour aboutir à $\Gamma(f)$ sans passer par $X(f)$. On montre en effet que $\Gamma(f)$ est aussi la TF de la fonction d'auto-corrélation temporelle ([Calcul détaillé Wikipedia](#)) pour un signal déterministe. Or, pour nos signaux aléatoires stationnaires et ergodiques nous savons calculer une fonction d'auto-corrélation statistique $R_x(\tau)$ qui est tout à fait l'équivalent de la fonction d'auto-corrélation temporelle des signaux déterministes ou de celle que l'on pourrait calculer sur une réalisation du signal aléatoire. Il suffit donc d'effectuer la TF de $R_x(\tau)$ pour obtenir la densité spectrale de puissance du signal aléatoire que nous voulons :

$$R_x(\tau) \xrightarrow{TF} \Gamma(f)$$

Exemple :

Nous avons déjà calculé la fonction d'auto-corrélation statistique du signal NRZ ce qui nous permet maintenant d'obtenir son spectre de puissance connaissant la TF de $\text{tri}()$:

$$R_x(\tau) = V^2 \text{tri}(\tau/T) \xrightarrow{TF} \Gamma(f) = TV^2 \text{sinc}^2(Tf)$$

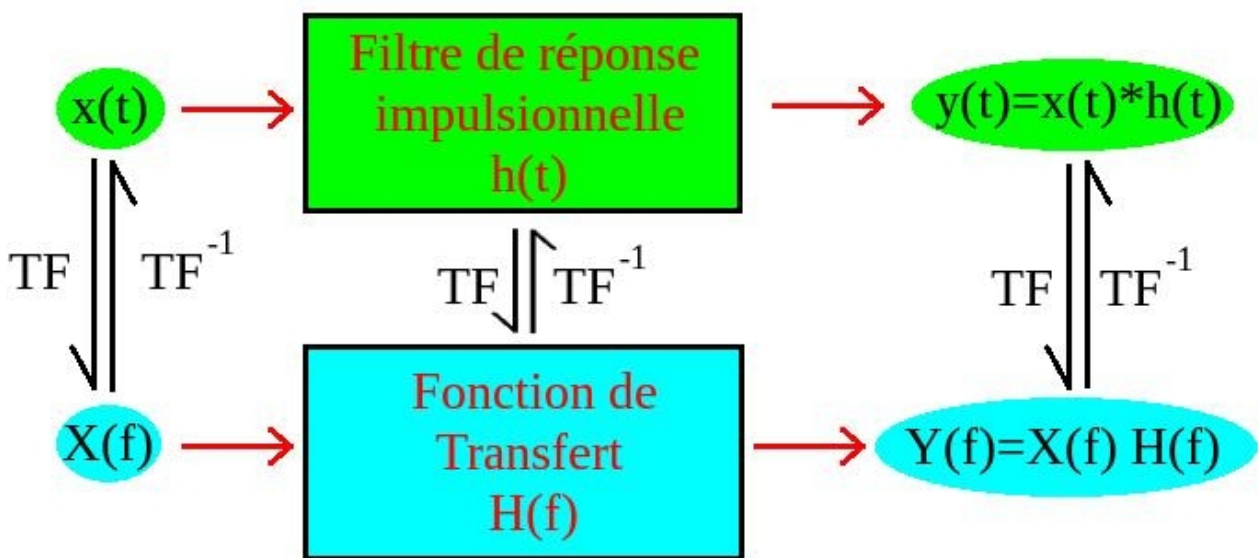
qui est un des spectres que nous avons inspecté lorsque nous avons présenté les différents formats de codage en introduction. La méthode est la même pour le calcul de tous les autres, l'étape la plus délicate étant le calcul de la fonction d'auto-corrélation statistique pour chacun de ces formats de transmission de signaux aléatoires.

Filtres

Fonction de transfert

Au chapitre précédent nous avons appris tout ce qu'il faut pour calculer les spectres de la plupart des signaux usuels y compris les signaux aléatoires. Au passage cela nous a permis de régler la question de la fréquence d'échantillonnage minimale d'un signal analogique. Nous pouvons à présent ré-aborder le problème central de la prédiction de la distorsion d'un signal sur le canal de transmission. En effet, il est maintenant possible de traduire dans le domaine fréquentiel l'effet de la convolution par la réponse impulsionnelle que nous avons appliquée au signal d'entrée $x(t)$ pour obtenir la sortie $y(t)$ dans le domaine temporel :

Canal de Transmission



Comme le représente le schéma ci-dessus, dans le domaine temporel (en vert) notre signal $x(t)$ subit au cours de sa transmission sur le canal une convolution par la réponse impulsionnelle du canal $h(t)$ tandis que dans le domaine fréquentiel (en bleu) d'après le théorème de la convolution, son spectre $X(f)$ ne subit qu'une simple multiplication par la TF de $h(t)$ appelée fonction de Transfert $H(f)$ ce qui est une opération beaucoup plus simple et dont on peut comprendre les effets intuitivement. La fonction de transfert est complexe donc possède un module et une phase :

$$H(f) = |H(f)| e^{i\Phi(f)}$$

Le fait que $X(f)$ qui est l'amplitude complexe de la composante de fréquence f soit multiplié par $H(f)$ à la traversée du canal signifie que cette composante est amplifiée/atténuée par $|H(f)|$ et déphasée (ce qui correspond à une avance ou retard temporel) de $\Phi(f)$. Du fait que $|H(f)|$ puisse couper ou transmettre plus ou moins bien les différentes fréquences qui composent notre signal, notre canal est appelé filtre de fonction de Transfert $H(f)$. Tout dispositif de traitement linéaire par lequel passera notre signal, y compris les circuits de l'émetteur et du récepteur, sera considéré désormais comme un filtre.

Filtre sans distorsions

Se pose alors naturellement la question : à quelle condition peut on considérer qu'un filtre ne fait subir aucune distorsion au signal, c'est à dire éventuellement l'amplifie/atténue et le retarde mais respecte sa forme ?

La réponse est que $|H(f)|$ ne doit pas dépendre de f et que $\Phi(f)$ doit être proportionnel à f :

$$|H(f)| = H_0$$

$$\Phi(f) = -2\pi t_0 f$$

où H_0 est une constante. On a, en effet, toujours le droit d'écrire le facteur de proportionnalité sous la forme $-2\pi t_0$, où la signification de t_0 apparaîtra clairement bientôt. On a donc :

$$Y(f) = X(f) H_0 e^{-i2\pi t_0 f}$$

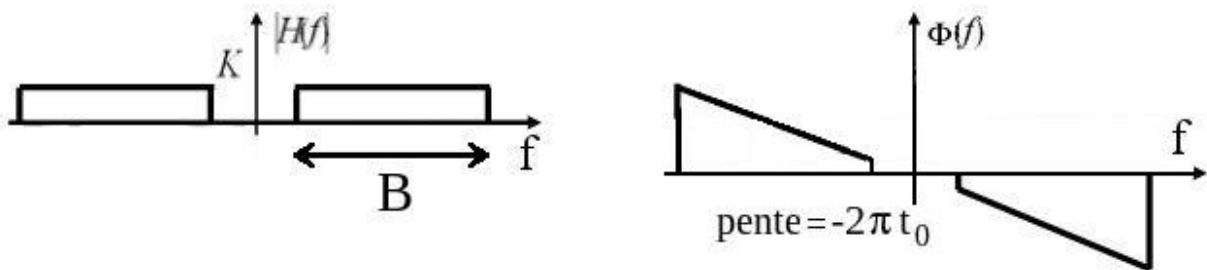
et si l'on applique une TF inverse des deux cotés de l'égalité :

$$y(t) = H_0 x(t) * \delta(t - t_0) = H_0 x(t - t_0)$$

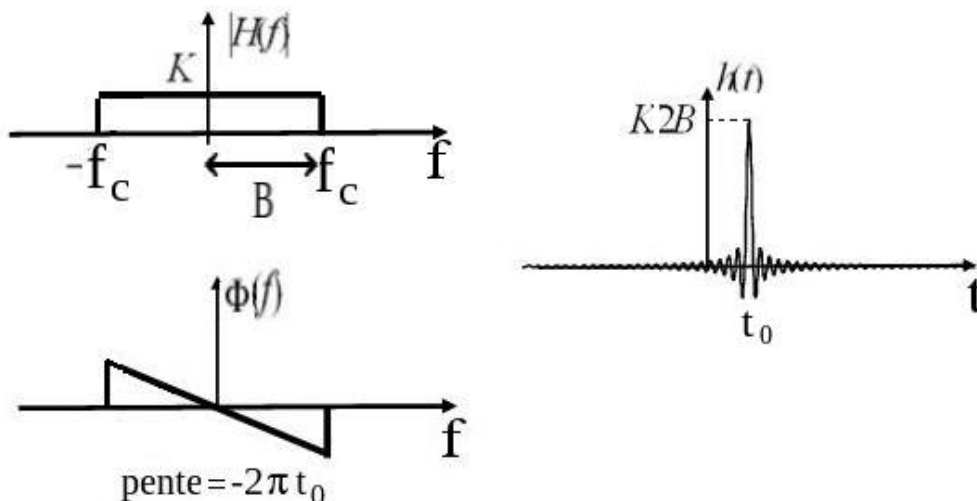
(on a utilisé la linéarité de la TF, le théorème de la convolution, notre connaissance de la TF d'une exponentielle complexe). Ce résultat signifie effectivement que le signal de sortie $y(t)$ a la même forme que le signal d'entrée $x(t)$ puisqu'il est juste retardé de t_0 et amplifié/atténué de H_0 par rapport à celui-ci. Intuitivement, le fait de retarder toutes les fréquences d'un signal d'un même t_0 (ce qui produit un déphasage proportionnel à f , $-2\pi t_0 f$, de chaque fréquence) ne modifie pas sa forme. Pas plus que de toutes les amplifier atténuer d'un même facteur H_0 . Inversement, si l'une de ces deux conditions n'est pas respectée on s'attend à de la distorsion. On distingue donc deux types de distorsion : la distorsion d'atténuation quand $|H(f)| = H_0$ n'est pas respecté et la distorsion de délai quand $\Phi(f) = -2\pi t_0 f$ n'est pas respecté.

Certains filtres satisfont les conditions uniquement dans une bande limitée de fréquences. On parle alors de filtres idéaux qui seront sans distorsion uniquement pour des signaux ayant toutes leurs fréquences dans cette bande.

On distingue en particulier les filtres idéaux passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande selon qu'ils coupent totalement (quand $|H(f)| = 0$) les hautes fréquences, les basses, les hautes et les basses, une bande précise de fréquences. Exemples de fonctions de transfert passe-bande,



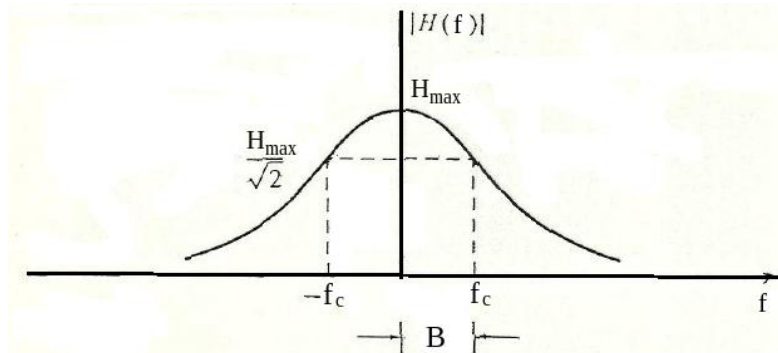
et passe bas :



B est la bande passante du filtre passe-bas (en comptant seulement les fréquences positives) et f_c la fréquence de coupure. On a également représenté la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre passe-bas, ici $2B.K\text{sinc}(2B(t-t_0))$ retardé de t_0 , puisque $|H(f)|=K \text{rect}(f/2B)$ et $\Phi(f)=-2\pi t_0 f$.

Dans le cas du filtre passe-bande il y a deux fréquences de coupures, une haute et une basse, non représentées.

Pour un filtre non idéal, la définition de la bande passante est quelque peu arbitraire. On la définit souvent comme la bande de fréquences pour lesquelles $|H(f)|/H_{\max} > 1 / \sqrt{2}$ (ceci correspond à une atténuation de -3dB en coordonnées logarithmiques).



Sélectionner un canal et filtrer le bruit

Un tuner radio est une bonne illustration d'un usage courant des filtres. De nombreux canaux ont été multiplexés pour occuper des bandes de fréquences séparées et se partager ainsi la bande passante disponible. Le récepteur doit évidemment être en mesure de dé-multiplexer c'est à dire sélectionner que la bande de fréquences de la station radio qui l'intéresse ce qui s'effectue en général à l'aide d'un filtre passe bande qui coupe toutes les autres fréquences.

La suppression du bruit ambiant ou du moins sa forte atténuation est un autre usage essentiel des filtres. Elle est possible car le signal qui intéresse le récepteur occupe une bande de fréquences très limitée. Par exemple, pour un signal en bande de base sa densité spectrale de puissance devient si faible au-delà d'une fréquence f_{\max} que l'on peut approximer sa puissance totale :

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(f) df \approx \int_{-f_{\max}}^{f_{\max}} \Gamma_x(f) df$$

tandis que le bruit thermique est si étendu en fréquences qu'on le nomme souvent bruit blanc par analogie avec la lumière blanche qui est composée de toutes les fréquences (couleurs) de la lumière visible. Sa densité spectrale de puissance peut donc être considérée constante :

$$\Gamma_n(f) = \lambda/2$$

Ce qui importe pour une bonne qualité de réception est le rapport signal sur bruit. En entrée du filtre c'est le rapport de la puissance P_x de notre signal $x(t)$ à celle P_n du bruit $n(t)$. Si le filtre a une largeur $B > f_{\max}$, il va laisser passer toute la puissance P_x de notre signal tandis que la puissance du bruit en sortie du filtre $P_{\hat{n}}$ sera très fortement réduite par rapport à P_n :

$$P_{\hat{n}} = \int_{-B}^B \frac{\lambda}{2} df = \lambda B \ll P_n$$

de sorte que le rapport signal sur bruit est considérablement amélioré.

$$\frac{P_x}{P_{\hat{n}}} \gg \frac{P_x}{P_n}$$

On est souvent tenté de réduire B pour couper plus de bruit ce qui a pour conséquence de couper les plus hautes fréquences du spectre de notre signal et se traduit par une inévitable distorsion. Par exemple, les symboles de type $\text{rect}()$ d'un signal NRZ, en perdant les plus hautes fréquences de leur spectre perdent du même coup leurs fronts abrupts et « s'étalent dans le temps ». L'animation [ggb9](#) propose d'observer l'effet de différents filtres sur le bruit et le signal.

Dans le cas d'un filtre quelconque la densité spectrale de puissance $|X(f)|^2/T$ d'un signal déterministe, doit être multipliée par $|H(f)|^2$ à la traversée du filtre puisque $X(f)$ est multiplié par $H(f)$. Par conséquent il doit en être de même pour un signal aléatoire et en particulier la puissance du bruit en sortie d'un tel filtre sera :

$$P_{\hat{n}} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Filtre optimal

Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour revenir sur la question centrale en transmission du signal, celle que nous avons déjà longuement évoquée de façon qualitative en introduction : quel traitement doit on effectuer en émission et réception du signal pour assurer une reconnaissance optimale des symboles transportant l'information c'est à dire un taux d'erreur d'identification des bits minimal, sachant que nos symboles subissent inévitablement plusieurs phénomènes qui en dégradent la qualité :

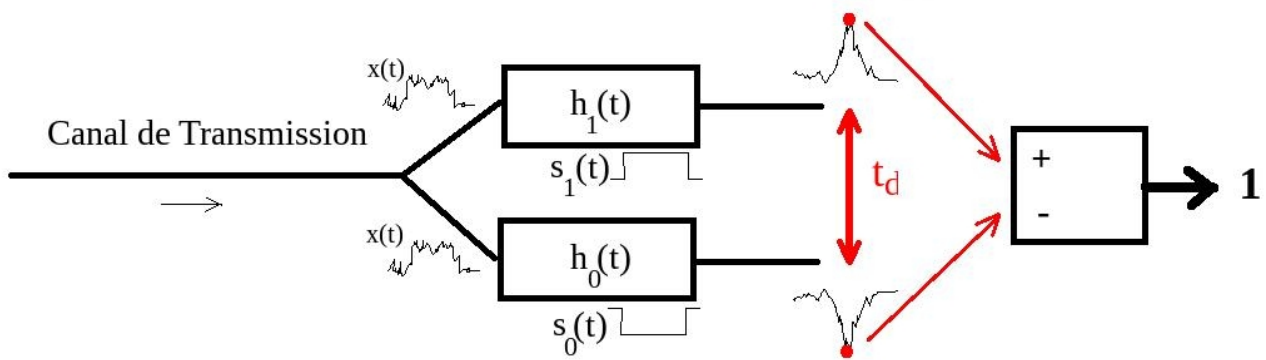
- Le bruit combiné à l'atténuation
- La distorsion
- L'interférence inter-symboles

Coté émetteur, nous avons dit que pour s'assurer un rapport signal/bruit optimal la plus élémentaire des mesures est d'émettre le signal avec la puissance maximale dans le respect des réglementations en vigueur. La modulation qui permet d'émettre notre signal sur une bande de fréquences plus favorable à sa transmission est une façon supplémentaire très efficace de limiter l'atténuation pour maintenir un haut niveau du rapport signal sur bruit au récepteur. La modulation sera traitée en détails au dernier chapitre.

Dans ce paragraphe notre objectif est de présenter le filtre optimal qui au niveau du récepteur doit nous permettre d'identifier les symboles en minimisant les effets du bruit. Nous traiterons dans la foulée l'égalisation pour remédier à la distorsion et le critère de Nyquist à respecter pour lutter contre l'interférence inter-symboles.

Jusqu'ici nous sommes restés très général dans notre présentation des filtres. Il est clair que dans le cas d'un signal analogique on ne connaît pas grand-chose à priori sur le signal que l'on va recevoir à un moment donné à part la fréquence f_{\max} de son spectre. Les choses se présentent très différemment en numérique car nous connaissons à l'avance les symboles de référence que nous sommes censés recevoir pour le 1 et le 0 par exemple ce qui doit nous aider à optimiser un filtre récepteur spécifiquement adapté à ces symboles. Ce que nous cherchons à faire précisément peut être décrit de la façon suivante : Le signal reçu $x(t)$ est aiguillé en parallèle sur deux filtres, les filtres de réponse impulsionnelle $h_1(t)$ et $h_0(t)$ respectivement spécifiquement adaptés à la reconnaissance des symboles de référence $s_1(t)$, $s_0(t)$ véhiculant respectivement le bit 1 et le bit 0. Pour le symbole $x(t)$ reçu on souhaite relever la valeur prise par les deux signaux de sortie des filtres à un instant t_d , appelé instant de décision et les comparer. La plus grande des valeurs $y_1(t=t_d)$ et $y_0(t=t_d)$ décidera de la réception d'un 1 ou d'un zéro.

$$\begin{aligned} y_1(t_d) > y_0(t_d) &\Rightarrow 1 \\ y_1(t_d) < y_0(t_d) &\Rightarrow 0 \end{aligned}$$



Le filtre optimal pour reconnaître s_1 doit avoir pour réponse impulsionnelle $h_1(t)=s_1(t_d - t)$ car dans ce cas, revenant à la définition du produit de convolution :

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= x(t) * s_1(t_d - t) = \int x(\tau) s_1(t_d - (t - \tau)) d\tau \\
 &\Rightarrow y_1(t) = \int x(\tau) s_1(t_d - t + \tau) d\tau \\
 &\Rightarrow y_1(t_d) = \int x(\tau) s_1(\tau) d\tau \\
 &\Rightarrow y_1(t_d) = c_{x s_1}(0)
 \end{aligned}$$

par conséquent la valeur relevée à la sortie du filtre est la fonction d'inter-corrélation à décalage temporel nul entre $x(t)$ reçu et le symbole de référence $s_1(t)$, exactement ce dont nous avons besoin pour reconnaître $s_1(t)$. L'instant de décision est donc en fait l'instant où les deux symboles que l'on compare sont bien alignés et où la fonction d'inter-corrélation atteint son pic et cette synchronisation a pu être déterminée à l'avance sur des bits d'entraînement de valeurs connues en ajustant et corrigeant t_d jusqu'à ce que le taux d'erreur sur les bits devienne minimal.

En parallèle, la sortie du deuxième filtre de réponse impulsionnelle $h_0(t)=s_0(t_d - t)$ est la fonction d'inter-corrélation entre $x(t)$ et $s_0(t)$ à l'instant de décision. La méthode se généralise au cas des formats multi-symboles où l'on n'a pas seulement deux symboles possibles à reconnaître mais un nombre parfois important impliquant autant de filtres opérant en parallèle.

Les fonctions de transfert des filtres sont comme toujours obtenues par les TF de $h_i(t)=s_i(t_d - t)$ et $h_0(t) = s_0(t_d - t)$ ce qui permet aux électroniciens de concevoir les circuits adéquats. Dans le cas où les symboles ont une symétrie paire, on a

$$s_i(t_d - t) = s_i(t - t_d) \xrightarrow{TF} S_i(f) e^{-2i\pi t_d f}$$

donc a un facteur de phase (retard) près le spectre des filtres n'est rien d'autre que le spectre des symboles de référence et on a en particulier $|H_i(f)| = |S_i(f)|$.

Le rapport signal sur bruit à l'instant de décision est la puissance instantanée du signal $y_i^2(t_d)$ (n'oublions pas que la valeur moyenne du carré d'un signal, $x^2(t)$, sur un intervalle de temps est une puissance moyenne, donc $x^2(t)$ est lui même une puissance) divisé par la puissance du bruit. Dans cette définition c'est la puissance du signal sans bruit qu'il nous faut donc on remplace le signal entrant $x(t)$ par $s_i(t)$ dans la convolution donnant $y_i(t_d)$

$$y_i(t_d) = \int s_i(\tau) h_i(t_d - \tau) d\tau = \int s_i(t_d - \tau) h_i(\tau) d\tau$$

On est ici revenu en arrière supposant que nous ne connaissons pas encore $h_i(t)$ et on a utilisé la commutativité du produit de convolution.

On va avoir besoin de la célèbre inégalité de Schwartz qui s'énonce ainsi : pour deux signaux $f(t)$ et $g(t)$:

$$\left(\int f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \int f^2(t) dt \int g^2(t) dt$$

Alors, d'après l'inégalité de Schwartz, la puissance instantanée $y_i^2(t_d)$ vérifie :

$$y_i^2(t_d) = \left(\int s_i(t_d - \tau) h_i(\tau) d\tau \right)^2 \leq \int s_i^2(t_d - \tau) d\tau \cdot \int h_i^2(\tau) d\tau \quad (1)$$

soit

$$y_i^2(t_d) \leq E_{s_i} \cdot \int h_i^2(\tau) d\tau \quad (2)$$

Car la première intégrale du produit d'intégrales n'est rien d'autre que l'énergie de $s_i(-(t-t_d))$ qui est aussi l'énergie E_{s_i} de $s_i(t)$ (le retournement $t \Rightarrow -t$ et le décalage temporel ne changent rien à la surface sous une courbe). L'égalité est obtenue lorsque les deux fonctions de l'intégrale sont proportionnelles.

Qu'en est il de la puissance du bruit ? Sa densité spectrale de puissance était $\lambda/2$ en entrée du filtre de fonction de transfert $H_i(f)$ donc elle a été multipliée par $|H_i(f)|^2$ en sortie. On a donc :

$$P_{\hat{n}} = \int \frac{\lambda}{2} |H_i(f)|^2 df = \frac{\lambda}{2} \int h_i(t)^2 dt \quad (3)$$

où l'on a sorti la constante de l'intégrale et utilisé le fait qu'il est équivalent d'intégrer en fréquence ou en temps pour calculer une Puissance (formule de Parseval du chapitre précédent). Le rapport signal sur bruit déduit de (2) et (3) se simplifie :

$$\frac{y_i^2(t_d)}{P_{\hat{n}}} \leq \frac{E_{s_i}}{\lambda/2} \quad (4)$$

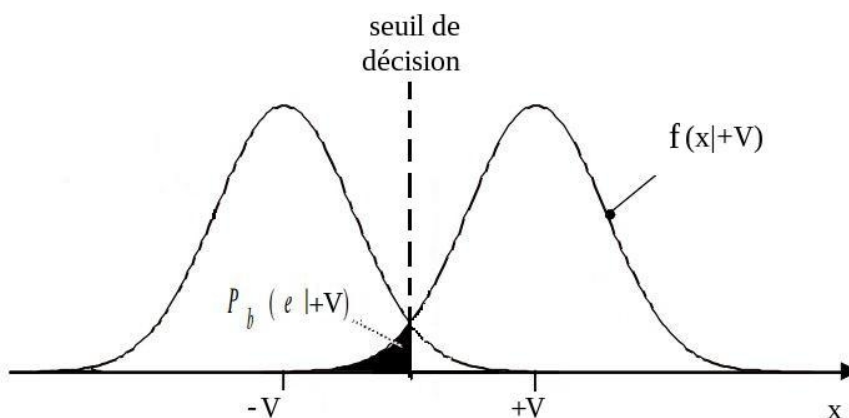
Il est donc également maximum (l'inégalité devient égalité) lorsque les deux fonctions de l'intégrale (1) sont proportionnelles ce qui est bien le cas avec le $h_i(t) = s_i(t_d - t)$ trouvé plus haut. Notre filtre optimise bien le rapport signal sur bruit en sortie à l'instant de décision CQFD, rapport qui ne dépend plus d'après (4) que de l'énergie du symbole transmis et de la densité de bruit sur la ligne de transmission.

Probabilité d'erreur en sortie du FO

Même si le taux d'erreur est minimisé il demeure une probabilité d'erreur qui peut être estimée sans difficulté. Prenons le cas d'une variable aléatoire pouvant prendre deux valeurs $+V$ et $-V$ et affectée d'un bruit blanc Gaussien n de densité spectrale $\lambda/2$. Cela signifie que partant par exemple de V , le signal bruité $V+n$ a une probabilité $p(x) = f(x|V) \cdot dx$ de tomber dans une bande de largeur dx autour d'une valeur x , où la densité de probabilité $f(x|V)$ est la gaussienne :

$$f(x, +V) = \frac{1}{N} e^{-\frac{(x-V)^2}{\lambda}}$$

N étant un facteur de normalisation nécessaire pour que la probabilité totale, intégrale de $p(x)$ sur toutes les valeurs possibles de x égale 1. La probabilité d'obtenir une valeur x plus proche de $-V$ que de la valeur de départ $+V$, probabilité d'erreur à partir de $+V$ notée $P_b(e|+V)$ est alors donnée par la surface en noir, intégrale de la gaussienne en dessous du seuil de décision sur la courbe suivante :



Il n'y a pas d'expression analytique (utilisant des fonctions connues) de ce genre d'intégrale. On voit bien que la surface noire, probabilité d'erreur, doit diminuer lorsque l'écart $2V$ entre $+V$ et $-V$ augmente ou lorsque la largeur des gaussiennes λ qui est la densité de puissance du bruit, diminue. On se contente de définir une fonction utile, $\text{erfc}(x)$, « fonction d'erreur complémentaire » dont les valeurs sont enregistrées dans des tables auxquelles on se reporte pour obtenir cette surface. Dans le cas de deux symboles qui ne sont pas nécessairement des niveaux constants $+V$ et $-V$, la distance D_{01} entre nos deux symboles de référence remplace $2V$ et on a la formule de la probabilité d'erreur:

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{D_{01}^2}{4\lambda}} \right)$$

Il nous suffit de savoir que $\text{erfc}()$ est décroissante pour vérifier que la probabilité d'erreur doit, comme on s'y attend, augmenter lorsque le bruit λ croît ou lorsque la distance entre nos deux symboles décroît, favorisant la confusion entre symboles.

Egalisation

Les symboles qui parviennent au récepteur ont subi des distorsions en général importantes sur le canal de propagation. Ce phénomène bien distinct du bruit n'a pas encore été pris en compte et a deux origines : distorsion de délai et distorsion d'atténuation dues, comme nous l'avons expliqué en détails au chapitre précédent, à la sélectivité en fréquences du canal et à la dispersion des délais de propagation des différentes fréquences qui entrent dans la composition de notre signal. Ce ne sont donc pas les symboles $s_1(t)$ et $s_0(t)$ tels qu'ils ont été émis qu'il s'agit de reconnaître au niveau du récepteur mais, après propagation, les symboles déformés $\tilde{s}_1(t)$ et $\tilde{s}_0(t)$ et ce sont donc $\tilde{h}_1(t) = \tilde{s}_1(t_d - t)$ et $\tilde{h}_0(t) = \tilde{s}_0(t_d - t)$ qu'il nous faut comme réponses impulsionnelles de nos filtres. Ceci exige d'avoir préalablement étudié les symboles déformés ce qui peut s'effectuer, par un échantillonnage à très haute fréquence, véritable scan numérique d'un grand nombre de symboles reçus véhiculant des bits connus à l'avance, suivi d'une moyenne pour obtenir les $\tilde{s}_1(t)$ et $\tilde{s}_0(t)$ moyens de référence à utiliser dans le filtre optimal.

Description équivalente : une fois émis, notre symbole est passé par deux filtres successifs, celui représenté par notre canal de transmission $T(f)$ non modifiable, et celui de notre récepteur $Gr(f)$ de sorte que la fonction de transfert totale est simplement $T(f).Gr(f)$. Il est alors parfaitement équivalent de dire que $T(f).Gr(f)$ doit être optimal pour reconnaître le symbole initialement émis $s_0(t)$ que de dire que $Gr(f)$ doit être optimal pour reconnaître le symbole $\tilde{s}_0(t)$ déformé par $T(f)$. Autrement dit, du point de vue de $s_0(t)$, le filtre total pour le reconnaître doit inclure le dernier filtre $Gr(f)$ de la chaîne simplement pour rattraper les distorsions provoquées par $T(f)$. C'est pourquoi on dit que $Gr(f)$ avec des réponses impulsionnelles telles qu $\tilde{h}_1(t)$ et $\tilde{h}_0(t)$ fait de l'égalisation.

L'égalisation implique des calculs rapides et adaptatifs notamment en transmissions sans fil car les conditions de propagation évoluent en permanence avec la mobilité des récepteurs et émetteurs et c'est donc en temps réel que les équipements doivent réévaluer $\tilde{s}_1(t)$ et $\tilde{s}_0(t)$ et autres symboles de référence pour maintenir les filtres optimaux.

Critère de Nyquist contre l'interférence inter-symboles

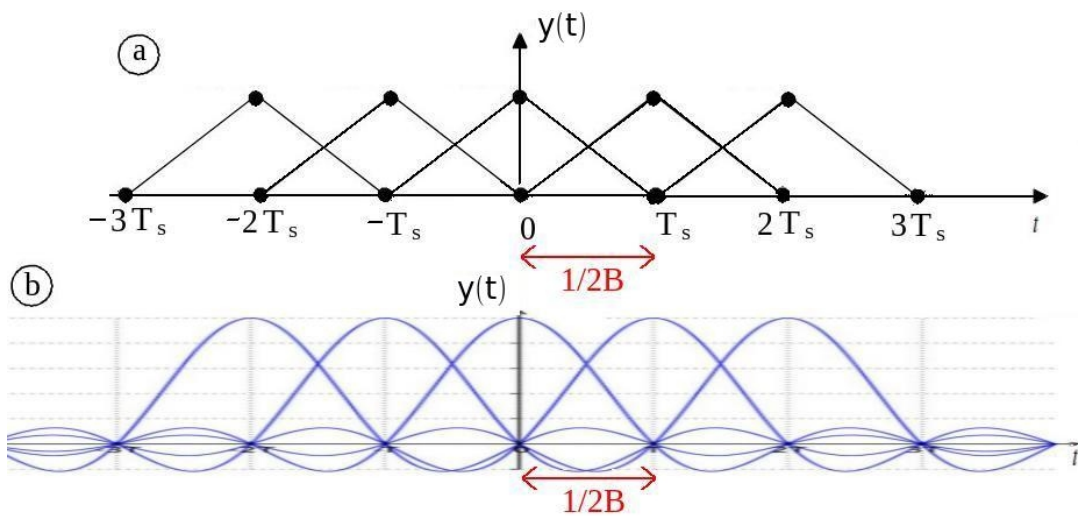
Le dernier phénomène que nous devons prendre en compte est l'étalement des $y_1(t)$ et $y_0(t)$ en sortie de nos filtres optimisés : pour gagner en débit on cherche en général à transmettre les symboles aussi proches les uns des autres que possible par conséquent tout $y(t)$ est susceptible de déborder sur le suivant et de fausser $y(t_d)$ à l'instant de décision pour ce dernier. Au point où nous en sommes, nous ne pouvons plus rien changer à notre filtre de réception $Gr(f)$, entièrement optimisé contre le bruit et la distorsion, pour une forme de symbole donnée. Nous cherchons maintenant s'il est possible de choisir un format de symbole émis permettant d'annuler l'interférence inter-symboles et si c'est le cas à estimer quelle durée minimale doit s'écouler entre deux tels symboles. La réponse nous est donnée par le critère de Nyquist : Si B est la bande passante du filtre optimal, la durée T_s entre deux symboles successifs doit être au minimum de $1/2B$.

En sortie du filtre optimal nous avons, en négligeant le bruit ce qui permet de remplacer $x(t)$ par $s(t)$ dans la formule de la convolution :

$$y(t) = s(t) * s(t_d - t)$$

Prenant l'exemple d'un symbole $s(t) = \text{rect}(t/T)$ pair, $s(t_d - t) = s(t - t_d)$ et la convolution a pour simple résultat un $T \cdot \text{tri}((t - t_d)/T)$ tandis que la fonction de transfert du filtre optimal est $|H(f)| = |S(f)| = T \cdot \text{sinc}(Tf)$. On a pris ici le module car la phase due au retard t_d ne va pas nous intéresser dans la suite de ce raisonnement. Ce qui nous importe c'est que la bande passante du filtre optimal $|H(f)|$ à -3dB est ici $B \sim 1/2T$ pour un sinus cardinal.

Dans ce cas, les symboles qui se succèdent en sortie sont des triangles de largeur $2T$ mais peuvent bien déborder les uns sur les autres du moment que chaque $\text{tri}()$ s'annule à l'instant de décision suivant où nous évaluons le pic du $\text{tri}()$ suivant s'ils sont exactement séparés d'une durée $T_s = T = 1/2B$ comme le montre le schéma suivant (signal a).



L'interférence inter-symbole n'a dans ce cas aucun impact négatif sur notre décision et nous vérifions comme annoncé par le critère de Nyquist que $T_s = 1/2B$.

Autre exemple (signal b) d'un symbole $s(t) = \text{sinc}(t/T)$ pair, $s(t_d - t) = s(t - t_d)$ et alors la convolution a pour simple résultat un sinc $((t - t_d)/T)$. La convolution d'un sinc par lui-même est en effet le même sinc pour la bonne raison que la multiplication de sa TF c'est à dire un rect par lui-même est le même rect ! La fonction de transfert du filtre optimal est dans ce cas $|H(f)| = |S(f)| = T \cdot \text{rect}(Tf) = T \cdot \text{rect}(f/2B)$. Sa bande passante est en effet $B \sim 1/2T$ pour un rectangle.

On voit alors que chaque sinus cardinal en sortie du filtre s'annule donc à l'instant de décision correspondant au pic du suivant si la durée T_s qui les sépare satisfait exactement $T_s = 1/2B$. Notons que l'interférence est nulle également aux instants de décision des autres symboles qui suivront même si le sinc() a, contrairement au tri(), une durée illimitée.

Le critère de Nyquist est donc aussi une contrainte sur la forme des symboles qui sont obtenus en pratique à l'aide d'un filtre source $S(f)$: tous les formats n'ont pas la remarquable propriété d'annuler l'interférence inter-symbole à tous les instants de décision ultérieurs et même ceux qui satisfont la condition ne sont pas toujours réalisables en pratique.

Signalons enfin que pour monter encore plus en débit il demeure possible de tolérer de l'interférence inter-symboles en rapprochant les symboles en-deçà de ce que le critère de Nyquist autorise. Cette stratégie, dite d'égalisation récursive, repose sur la capacité de prédire et corriger l'effet de l'interférence que produira un symbole qui a été déjà correctement évalué, sur le suivant.

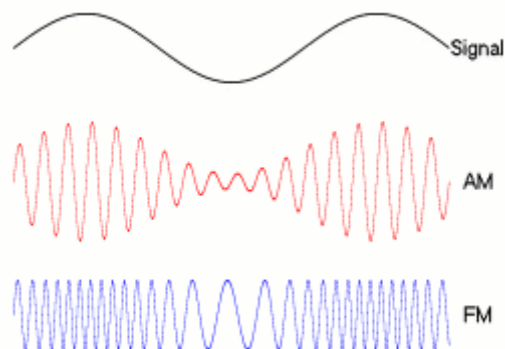
Modulations

Généralités

Nous abordons enfin les modulations, une opération si fondamentale qu'elle a donné aux équipements d'extrémités de liaison le nom de modulateurs/démodulateurs, ou Modems en abrégé. Son objectif est la transposition de toutes les fréquences d'un signal autour d'une fréquence f_0 , dite fréquence de porteuse, plus favorable à la propagation du signal c'est à dire produisant moins d'atténuation et de distorsion. f_0 est le plus souvent très supérieure à la fréquence maximum f_{\max} du spectre initial, spectre en Bande de Base de notre signal. Cette opération est notamment indispensable lorsque l'on veut atteindre des hauts débits sur une paire de cuivre de longue distance (ADSL) ou en sans fil, canal par nature très bruité. La modulation s'impose également souvent pour faire du multiplexage, c'est à dire partager une même bande passante entre différentes communications modulées autour de fréquences suffisamment espacées pour que les bandes n'interfèrent pas. Ces bandes peuvent par exemple être la voie montante et la voie descendante d'une liaison Full Duplex simultanée comme en ADSL. La modulation effectuée au niveau de l'émetteur exige évidemment que l'opération inverse de démodulation soit assurée au niveau du récepteur.

Il existe plusieurs types de modulation mais dans tous les cas notre signal $x(t)$ va moduler les grandeurs caractéristiques d'une sinusoïde de fréquence f_0 , que sont son amplitude et sa phase et $x(t)$ sera donc désigné comme signal modulant, le résultat étant le signal modulé $m(t)$ émis et transmis sur le lien. Autrement dit, pour une porteuse $p(t)=A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$, une modulation d'amplitude, AM, multipliera A_0 par une fonction linéaire de notre signal, $K+k x(t)$, tandis qu'une modulation angulaire ajoutera à φ_0 une phase variable $\varphi(t)$ proportionnelle à $x(t)$ (modulation de phase PM), où telle que sa dérivée $d\varphi(t)/dt$ soit proportionnelle à $x(t)$ (modulation de fréquence FM).

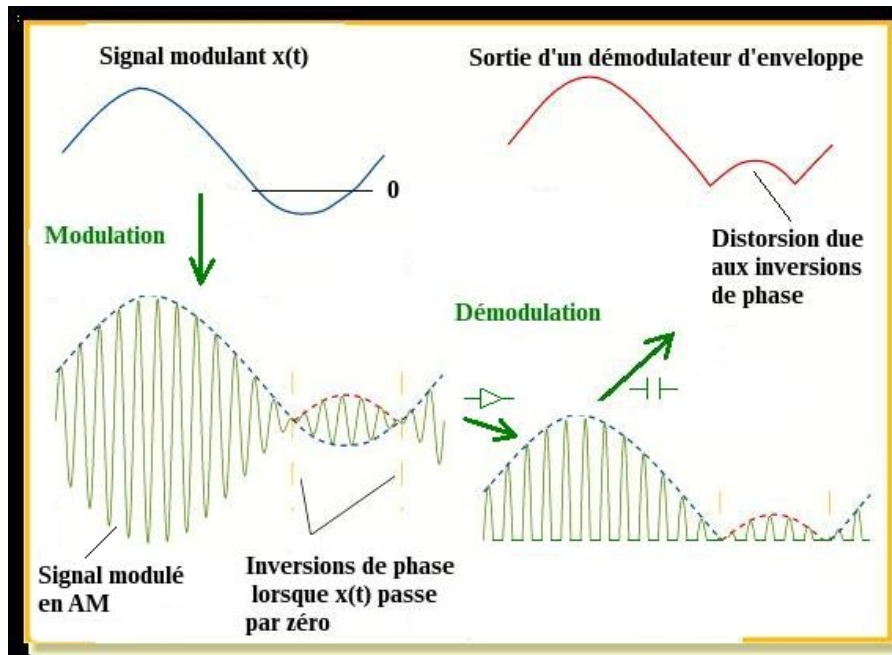
Nous allons décrire ces différents types de modulation d'abord dans le cas général de signaux analogiques puis nous traiterons le cas particulier des signaux numériques où de grandes simplifications sont attendues. La figure ci-dessous permet de comparer visuellement les résultats d'une modulation d'amplitude et d'une modulation angulaire (ici FM) à partir d'un signal modulant lui même sinusoïdal.



Modulations d'amplitude avec et sans porteuse

a) Modulation avec porteuse

La modulation d'amplitude la plus simple consiste à multiplier directement notre signal $x(t)$ par la sinusoïde porteuse $p(t)$ et la démodulation la plus simple consiste en un redressement (diode coupant les courants négatifs) suivi d'un filtre passe bas (circuit capacitif) qui agit en détecteur d'enveloppe exactement comme le filtre passe-bas qui nous permettrait de retrouver le signal analogique à partir de ses échantillons. Cette méthode ne peut pas fonctionner avec un signal modulant qui passe par zéro car alors le démodulateur d'enveloppe ne retrouvera pas $x(t)$ mais plutôt le signal rouge sur la figure suivante :



Une solution ancienne était donc d'atténuer et surélever le signal c'est à dire ajuster K et k pour que $K+k x(t)$ reste en valeurs positives avant de le multiplier par $p(t)$. Cette solution n'est pas optimale car on dépense alors de l'énergie pour transmettre la partie non utile $Kp(t)$.

b) Modulation sans porteuse

A cette modulation dite « avec porteuse » on préfère donc aujourd'hui la modulation dite « sans porteuse » où $m(t)$ est directement le produit de $x(t)$ et $p(t)$. L'inconvénient est que l'on ne peut plus utiliser un simple détecteur d'enveloppe mais une autre méthode de démodulation insensible aux inversions de phase, appelée démodulation synchrone, consistant à multiplier à nouveau, au niveau du détecteur, $m(t)$ par la même porteuse ayant servi à la modulation. Nous avons en effet les étapes :

$$x(t) \Rightarrow m(t)=x(t).p(t) \Rightarrow dm(t)=m(t).p(t)$$

ce qui dans le domaine fréquentiel se traduit pour la première étape (modulation) par

$$X(f) \Rightarrow M(f)=X(f)*(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))/2 = (X(f-f_0)+X(f+f_0))/2 \quad (1)$$

qui montre que le spectre du signal a bien été transposé autour de la fréquence porteuse f_0 par la modulation ; c'était le but. Et pour la deuxième étape :

$$M(f) \Rightarrow DM(f)=M(f)*(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))/2 = (M(f-f_0)+M(f+f_0))/2$$

et si l'on substitue l'expression (1) de $M(f)$:

$$DM(f)= (X(f-2f_0)+X(f)+X(f)+X(f+2f_0))/4$$

Il suffit donc d'un filtre passe bas appliqué à $DM(f)$ pour ne récupérer que la partie $X(f)$ en coupant la réplique transposée en $2f_0$, et donc, récupérer du même coup $x(t)$.

c) Récupération de la porteuse

Toute la difficulté de cette démodulation est de disposer au niveau du récepteur d'exactly la même porteuse $p(t)$ (du moins une sinusoïde parfaitement synchronisée sur $p(t)$) ayant servi à moduler le signal. Cela exige d'être capable d'extraire la porteuse du signal modulé $m(t)$ lui-même avant de s'en servir pour démoduler. Ce serait simple s'il y avait dans le signal modulé un terme additionnel $Kp(t)$ comme dans le cas de la modulation avec porteuse car la TF de ce terme est $K(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))/2$ de sorte qu'il suffirait d'un filtre étroit autour de f_0 pour récupérer $p(t)$. Mais comme nous voulons éviter la dépense énergétique liée à la transmission de cette porteuse nous devons trouver une autre méthode d'extraction de porteuse.

Pour extraire une porteuse de $m(t)$ nous calculons son carré : $m^2(t) = x^2(t) \cdot p^2(t)$ et ce faisant nous obtenons le spectre :

$$TF(x^2(t)) * (\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))/2 * (\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))/2$$

soit,

$$TF(x^2(t)) * (\delta(f-2f_0)+2\delta(f)+\delta(f+2f_0))/4 \quad (2)$$

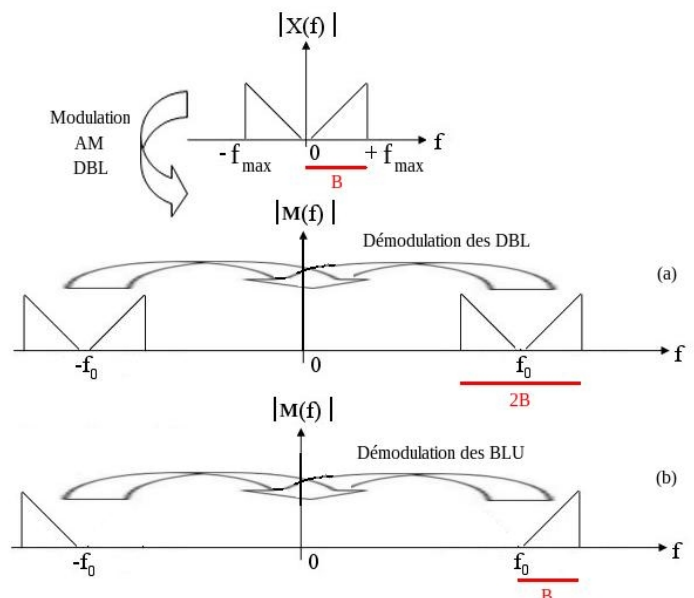
Le terme qui nous intéresse dans cette expression est celui en $\delta(f-2f_0)+\delta(f+2f_0)$ car c'est une sinusoïde de fréquence $2f_0$, double de celle de la porteuse. Pouvons nous le récupérer par simple filtrage étroit autour de $2f_0$? Pour que ce soit possible il suffit qu'il y ait un terme constant C additif dans $x^2(t)$ ($x^2(t)=C+\dots$, autrement dit que la valeur moyenne C de $x^2(t)$ soit non nulle) car alors $TF(x^2(t)) = C\delta(f)+\dots$ et $\delta(f)$ étant l'élément neutre du produit de convolution, (2) s'écrit $(\delta(f-2f_0)+\delta(f+2f_0)) C/4 + \dots$, que nous pouvons donc filtrer comme voulu. Or, quel que soit $x(t)$ réel non identiquement nul, $x^2(t) \geq 0$ a toujours une valeur moyenne non nulle (et positive) ce qui n'est pas le cas en général pour $x(t)$ d'où l'intérêt d'avoir mis le signal au carré.

Ayant récupéré une sinusoïde de fréquence $2f_0$ double de celle de la porteuse, comment retrouver la porteuse elle-même? C'est possible avec un circuit diviseur de fréquence par 2. La méthode est de générer en parallèle une sinusoïde de fréquence f'_0 proche de f_0 avec un oscillateur, à partir de laquelle on obtient la sinusoïde de fréquence double $2f'_0$ exactement par la même méthode que ci-dessus (mise au carré et filtrage). On ajuste alors la fréquence f'_0 de l'oscillateur jusqu'à ce que les sinusoïdes de fréquence $2f'_0$ et $2f_0$ soient synchronisées, ce que l'on contrôle grâce à un circuit comparateur de phase à PLL que nous décrirons au prochain chapitre. A ce moment là on sait que $2f'_0 = 2f_0$ donc que l'oscillateur ne génère rien d'autre que la sinusoïde de fréquence $f'_0 = f_0$ que nous souhaitons récupérer afin de l'utiliser pour démoduler.

Il demeure une ambiguïté de phase globale : avons nous finalement récupéré la porteuse $p(t)$ ou $-p(t)$ (en opposition de phase)? Impossible de le dire puisque la mise au carré $m^2(t) = x^2(t) \cdot p^2(t)$ a évidemment fait perdre cette information. Au final, cette ambiguïté se répercute sur le signal démodulé $\pm x(t)$. Nous aborderons les solutions simples à ce problème dans le cas où $x(t)$ est numérique.

d) Modulation à Bande Latérale Unique

Les modulations que nous venons de décrire sont dites à Double Bande Latérale (DBL) car si $B=f_{max}$ est la largeur de bande (toujours en ne comptant que les fréquences positives) de $X(f)$, la largeur de $X(f-f_0)$ dans le signal modulé (1), est doublée à $2B=2f_{max}$ comme le montre le schéma ci-contre. Peut on remédier à cet



encombrement spectral doublé qui résulte de la modulation. Une solution simple serait de ne garder par filtrage qu'une seule des deux bandes (bande supérieure dans la figure) car ensuite la démodulation que nous avons décrite fonctionne aussi bien à partir de deux bandes (a) qu'à partir d'une seule (b), pour retrouver un signal en bande de base. Dans le cas de la figure le signal modulé a peu d'énergie autour de f_0 donc le filtre n'a pas besoin d'être idéal (ce qui est difficile à réaliser en pratique) pour ne pas détériorer le spectre. Sinon il est possible aussi de moduler directement le signal en BLU pour se passer d'un tel filtre. L'idée est d'utiliser un circuit capable de déphaser de $\pi/2$ toutes les sinusoïdes qui entrent dans la composition de notre signal $x(t)$ pour obtenir $[x]_{\pi/2}(t)$ et de faire de même avec la porteuse $p(t)=\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ pour obtenir $[p]_{\pi/2}(t)=\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$. Ensuite on construit le signal modulé $m(t)=x(t).p(t)+ [x]_{\pi/2}(t).[p]_{\pi/2}(t)$. Suivons ce que cela produit sur une composante $x_F(t)=\cos((2\pi F t)$ de fréquence F quelconque (alors $[x_F]_{\pi/2}(t)=\sin(2\pi F t)$) participant à notre signal. Alors, $m_F(t)=x_F(t).p(t)+ [x_F]_{\pi/2}(t).[p]_{\pi/2}(t)$ a pour TF :

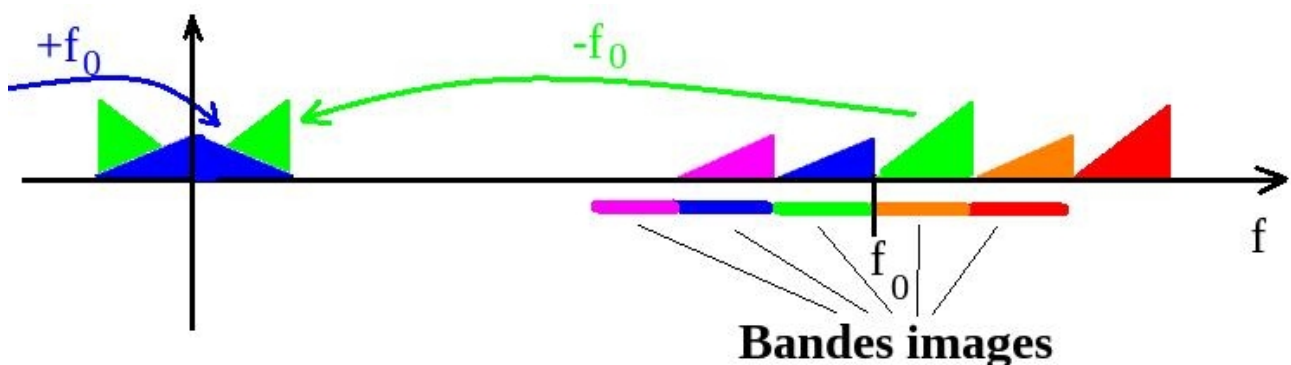
$$M_F(f)=(\delta(f-F)+\delta(f+F))/2*(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))/2+(\delta(f-F)-\delta(f+F))/2i*(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0))/2i$$

soit après simplification et en utilisant $i^2 = -1$:

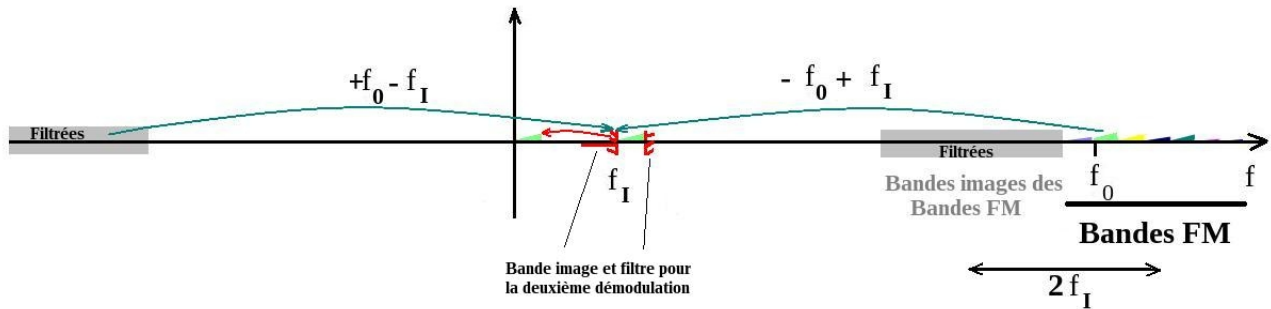
$$M_F(f)=(\delta(f-(f_0-F))+\delta(f+f_0-F))/2$$

Autrement dit, il n'y a dans la partie de fréquences positives du spectre modulé que la fréquence $f_0 - F$ de la bande inférieure et pas celle $f_0 + F$ de la bande supérieure ceci pour toutes les composantes fréquentielles F de $x(t)$. Nous avons donc obtenu directement une modulation BLU ne gardant que la bande inférieure dans ce cas. Pour une BLU de la bande supérieure il faudrait construire $m(t)$ par soustraction plutôt que par addition de $[x_F]_{\pi/2}(t).[p]_{\pi/2}(t)$.

d) Détection hétérodyne



La BLU permet donc d'économiser de la bande passante mais il faut comprendre que (Cf figure ci dessus) lorsque on désire démoduler la bande de fréquences verte qui a été modulée en f_0 , la partie de la bande de fréquences bleue qui se situe en fréquences négatives sera aussi ramenée en bande de base et se superposera à la bande désirée. La bande de fréquences indésirables dans toute démodulation s'appelle la bande image et la figure représente en couleur identique les bandes images pour chaque canal que l'on souhaiterait pouvoir démoduler. Une solution serait d'avoir un filtre pour chaque bande image à activer lorsque on voudrait démoduler le canal correspondant, ce qui serait complexe et coûteux étant donné le nombre de canaux. Une autre solution est d'effectuer une démodulation en deux étapes dite hétérodyne consistant à d'abord ramener la bande voulue, qui se situe en fréquence f_0 , à une fréquence intermédiaire f_1 fixée (il faut pour cela multiplier le signal par une sinusoïde de fréquence ajustable $f_0 - f_1$) comme l'indique la figure suivante.



Pour cette première démodulation, toutes les bandes images des bandes que l'on voudrait pouvoir démoduler avec notre récepteur FM sont alors dans la zone grise située à $2f_I$ des bandes FM et on peut toutes les nettoyer avec un unique filtre coupe large bande. Une fois notre bande désirée démodulée en fréquence intermédiaire f_I , il ne reste plus qu'à employer un unique filtre passe-bande (en rouge) étroit pour nettoyer la nouvelle bande image puis démoduler en bande de base.

Modulations angulaires

Le principal avantage des modulations angulaires (PM et FM) sur la modulation d'amplitude est que les distorsions et les bruits subis sur le canal de transmission affectent beaucoup plus l'amplitude que la phase du signal modulé. Donc en faisant transporter l'information par la phase de la porteuse on s'assure une immunité aux bruits et une transmission beaucoup plus propre. C'est pourquoi les stations de radiodiffusion utilisent généralement la modulation FM. De plus, l'émission du signal modulé se fait à amplitude donc puissance constante.

Notant $m_1(t)$ et $m_2(t)$ les modulations angulaires de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, la modulation angulaire de la somme $x_1(t) + x_2(t)$ n'est pas la somme des modulations angulaires $m_1(t) + m_2(t)$ (car le $\cos()$ est non linéaire : $\cos(a+b) \neq \cos(a) + \cos(b)$). Les modulations angulaires sont donc également non linéaires ce qui nous interdit d'utiliser le principe de superposition donc les techniques d'analyse spectrale usuelles pour aboutir au spectre du signal modulé. Dans certaines situations comme dans le cas d'un signal modulant $x(t)$ lui même sinusoïdal, on peut mener à bien le [calcul](#) pour gagner en intuition en utilisant des fonctions de Bessel, mais dans le cas général on devra s'en remettre à une règle empirique, la règle de Carson.

a) Encombrement spectral

Phase et fréquence sont étroitement liées de sorte que toute phase variable peut se traduire en une fréquence variable et vice-versa, les deux écritures suivantes étant équivalentes :

$$\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \equiv \cos(2\pi(f_0 + f(t))t + \varphi_0)$$

moyennant la relation de passage liant phase et fréquence:

$$\varphi(t) - \varphi_0 = 2\pi f(t) \cdot t \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\rangle_0^t \quad (1)$$

Le dernier terme fait apparaître que le $f(t)$ figurant dans le $\cos()$ est la valeur moyenne de $d\varphi(t)/dt$ entre l'origine des temps et t et que c'est donc une fréquence moyenne à distinguer de la fréquence instantanée $f_i(t)$ qui est elle directement proportionnelle à $d\varphi(t)/dt$ et que l'on déduit de (1) en choisissant une origine du temps infiniment voisine de t .

On parlera de modulation de phase lorsque c'est la phase qui est directement proportionnelle à notre signal modulant $x(t)$:

$$\varphi(t) = K x(t) \Leftrightarrow f_i(t) = \frac{K}{2\pi} \frac{dx(t)}{dt} \quad (2)$$

et on parlera de modulation de fréquence lorsque c'est la dérivée de la phase donc la fréquence instantanée qui est proportionnelle à $x(t)$.

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = K x(t) \Leftrightarrow f_i(t) = \frac{K}{2\pi} x(t) \quad (3)$$

Dans les deux cas, les variations de $x(t)$ se traduisent par des variations de $f_i(t)$ et on appelle Δf_i l'excursion maximale de fréquence instantanée que produisent ces variations.

D'après la règle empirique de Carson, à cause de la déviation de fréquence, l'encombrement spectral du signal $m(t)$ en modulations angulaires ne sera plus $2f_{\max}$ comme en DBL mais $2(f_{\max} + \Delta f_i)$, donc approximativement le même encombrement qu'en DBL si on fait en sorte que Δf_i reste faible par rapport à f_{\max} . Nous y reviendrons dans le cas des transmissions numériques qui nous concernent plus particulièrement et simplifient beaucoup le traitement.

b) Modulateur et démodulateur

Les modulateurs et démodulateurs sont à peu de choses près les mêmes pour les deux types, PM et FM, de modulation angulaire.

Les modulateurs sont des Oscillateurs Commandés en Tension (VCO en anglais), circuits oscillants traduisant une tension en entrée en une fréquence instantanée du signal de sortie, de sorte qu'il suffit d'injecter $x(t)$ ou $dx(t)/dt$ à l'entrée de l'OCT pour obtenir en sortie le signal modulé en fréquence ou phase respectivement.

Les démodulateurs sont des montages à Phase Locked Loop (PLL), boucle à verrouillage de phase en français. Envisageons tout d'abord le schéma du démodulateur d'un signal PM. Le signal $m(t)$ en entrée du démodulateur est :

$$m(t) \propto \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t) + \phi_0(t)) \quad (4)$$

où $\varphi(t)$, proportionnelle à notre signal $x(t)$, est la phase que nous souhaitons extraire de $m(t)$ et $\phi_0(t)$ représente une dérive dans le temps de la porteuse très lente et inconnue. Comme dans le cas de la démodulation d'amplitude, la démodulation requiert de multiplier $m(t)$ par exactement la même porteuse que celle qui a servi à moduler mais cette fois-ci déphasée de $\pi/2$ et avec éventuellement un petit retard de phase $\delta\phi_0(t)$:

$$p_{\pi/2}(t) \propto \sin(2\pi f_0 t + \phi_0(t) + \delta\phi_0(t)) \quad (5)$$

Une [formule](#) bien connue permet de linéariser le produit de type $\cos(a)\sin(b)$:

$$m(t)p_{\pi/2}(t) \propto \sin(2\pi(2f_0)t + 2\phi_0(t) + \varphi(t) + \delta\phi_0(t)) - \sin(\varphi(t) + \delta\phi_0(t))$$

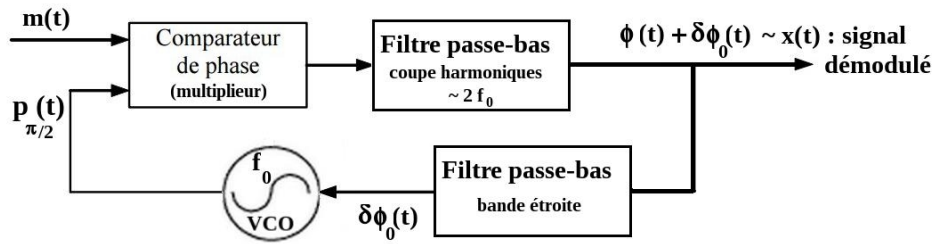
et un filtre passe-bas suivant cette multiplication permet d'éliminer aisément le premier terme dont le spectre est concentré autour de la fréquence double $2f_0$. De plus, une modulation de phase aura en général $\varphi(t) \ll 1$ pour minimiser l'excursion de fréquence et ainsi l'encombrement spectral. Alors on peut approximer $\sin(\varphi(t) + \delta\phi_0(t)) \sim \varphi(t) + \delta\phi_0(t)$ et par conséquent nous avons bien réussi à récupérer notre signal initial $x(t)$ à une petite dérive $\delta\phi_0(t)$ près :

$$\varphi(t) + \delta\phi_0(t) \quad (6)$$

qui sera maintenue négligeable si notre porteuse de démodulation reste bien accrochée à celle de la modulation, $\delta\phi_0(t)$ étant le déphasage entre elles.

Mais pour que tout cela fonctionne il faut bien entendu être capable de générer ce $p_{\pi/2}(t)$ qui suive la porteuse de $m(t)$ avec un minime écart $\delta\phi_0(t)$. La dérive $\delta\phi_0(t)$ étant très lente par rapport à $\varphi(t)$, son

spectre est concentré à beaucoup plus basses fréquences et il est donc possible de l'isoler par filtrage passe-bas de bande étroite. Il n'y a plus qu'à piloter le VCO générant $p_{\pi/2}(t)$ avec $\delta\phi_0(t)$ donc générant une boucle (cf figure ci-après) verrouillant la phase de dérive à zéro: dès que $\delta\phi_0(t)$ s'écarte de zéro, l'oscillateur accélère ou décélère pour réduire cet écart.



Démodulateur de Phase à PLL

Le démodulateur d'un signal FM est une variante consistant à simplement supprimer le filtre à bande étroite qui nous a permis d'isoler le signal de dérive. Dans ce cas $p_{\pi/2}(t)$ généré par le VCO suivra encore mieux $m(t)$: non seulement les variations de $\phi_0(t)$ à $\delta\phi_0(t)$ près mais aussi celles de $\phi(t)$ à $\delta\phi(t)$ près! Par conséquent son expression (5) est modifiée en :

$$p_{\pi/2}(t) \propto \sin(2\pi f_0 t + \phi_0(t) + \delta\phi_0(t) + \phi(t) + \delta\phi(t)) \quad (5bis)$$

de même que le signal de sortie qui maintenant pilote le VCO :

$$\delta\phi(t) + \delta\phi_0(t) \quad (6bis)$$

$\delta\phi_0(t)$ étant toujours maintenue négligeable, la boucle à verrouillage de phase a donc extrait $\delta\phi(t)$ qui n'est autre que l'écart $\phi(t) - \phi(t - \delta t)$ entre la valeur actuelle de la phase de $m(t)$ que $p_{\pi/2}(t)$ n'a pas encore rattrapée et la valeur antérieure $\phi(t - \delta t)$ que $p_{\pi/2}(t)$ a rattrapée. δt étant très petit, essentiellement le temps de parcours de la boucle de rétroaction,

$$\delta\phi(t) = \phi(t) - \phi(t - \delta t) = (d\phi(t)/dt) \cdot \delta t$$

et c'est bien un signal proportionnel (δt est une constante) à $d\phi(t)/dt$ donc à $x(t)$ que nous récoltons en sortie du démodulateur FM.

Modulations du signal numérique

Dans le cas des transmissions numériques à 1 bit par symbole les modulations sont particulièrement simples. On distingue la modulation d'amplitude ASK (amplitude shift keying), FSK (frequency shift keying) et PSK (phase shift keying).

a) PSK à 2 états

La modulation partant d'un signal NRZ en bande de base, on se souvient que le spectre de puissance du signal modulant supposé à 2 états équiprobables a été obtenu à partir de sa fonction d'auto-corrélation :

$$R_x(\tau) = V^2 \text{tri}(\tau/T) \xrightarrow{TF} \Gamma(f) = TV^2 \text{sinc}^2(Tf)$$

Ce spectre en $\text{sinc}^2()$ est celui d'un signal qui concentre toute son énergie en basses fréquences. Tel quel il n'est donc exploitable que sur courtes distances sur un lien de cuivre et comme il ne possède pas de raie à la fréquence symbole $1/T$ il est plus adapté à des protocoles de liaison asynchrones ne nécessitant pas une récupération d'horloge, comme le RS232.

La modulation de ce signal en transposant son spectre en beaucoup plus haute fréquence autour d'une fréquence de porteuse f_0 , doit autoriser un usage sur longue distance.

Le signal modulé en PSK doit être de la forme

$$m(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

avec $\varphi(t) = \pm \varphi_0$ le signe de la phase étant déterminé par le bit à coder ce qui fait que la modulation de phase est bien plus simple qu'en analogique. Utilisant $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ on obtient :

$$m(t) = A_0 \cos(\varphi_0) \cos(2\pi f_0 t) \mp A_0 \sin(\varphi_0) \sin(2\pi f_0 t)$$

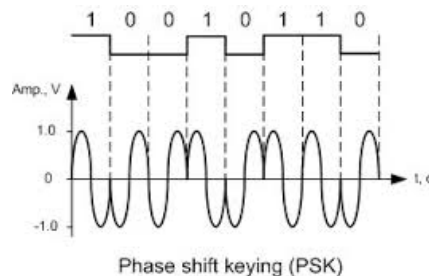
car $\cos()$ est pair.

Le premier terme qui n'est pas influencé par le signal modulant est une simple porteuse d'amplitude $A_0 \cos(\varphi_0)$. Le deuxième terme apparaît comme une modulation d'amplitude (le signe \mp déterminé par le signal modulant affecte son amplitude $\mp A_0 \sin(\varphi_0)$) d'une porteuse $\sin(2\pi f_0 t)$ dite en quadrature.

On sait qu'au final la probabilité d'erreur sur les bits sera minimale si la distance D_{01} entre les deux symboles à distinguer est la plus grande possible. Il faut donc que l'écart $2\varphi_0$ entre les deux phases soit maximal c'est à dire égal à π . Alors $\varphi_0 = \pi/2$ et la porteuse du premier terme de $m(t)$ disparaît. On devra donc s'en passer si à la réception on désire récupérer une porteuse. Nous avons finalement :

$$m(t) = \mp A_0 \sin(2\pi f_0 t)$$

et nous pouvons représenter la succession des symboles en PSK à deux états de phase $\pm \pi/2$ qui s'effectue avec un simple circuit multiplicateur par ± 1 en fonction du bit à transmettre.



Puisque la modulation de phase se réduit ici à une modulation d'amplitude par ± 1 , on sait que l'on va avoir un spectre du signal modulé qui n'est que la translation du spectre en bande de base en fréquence porteuse et aura donc un encombrement spectral double. Si $1/2T$ est approximativement la largeur de bande à -3dB de $\text{sinc}^2(Tf)$, l'encombrement spectral de $m(t)$ sera donc de $1/T$.

La démodulation se réduit à un filtre optimal de discrimination entre les deux symboles, qui d'habitude effectue en parallèle l'inter-correlation entre $m(t)$ et les deux symboles de référence à reconnaître mais comme ceux-ci sont ici exactement opposés $\mp A_0 \sin(2\pi f_0 t)$, une seule inter-correlation $R_{xs}(0)$ suffit,

$$\int m(t) A_0 \sin(2\pi f_0 t) dt$$

et la décision sur le bit reçu est déterminée par le signe du résultat.

La différence entre $s_0(t)$ et $s_1(t)$ est ici $2A_0 \sin(2\pi f_0 t)$ donc le carré de la distance entre les deux symboles sur une période est

$$D_{01}^2 = \int_0^T 4 A_0^2 \sin^2(2\pi f_0 t) dt = 2 A_0^2 T$$

que l'on n'a plus qu'à remplacer dans l'expression donnant la probabilité d'erreur de bit.

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{D_{01}^2}{4\lambda}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A_0^2 T}{2\lambda}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_s T}{\lambda}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{\lambda}}\right)$$

où l'on a introduit successivement la puissance $P_s = A_0^2/2$ et l'énergie $E = P_s T$ du signal d'amplitude A_0 . Il sera intéressant de comparer ultérieurement cette probabilité d'erreur avec celles des autres types de modulation numérique.

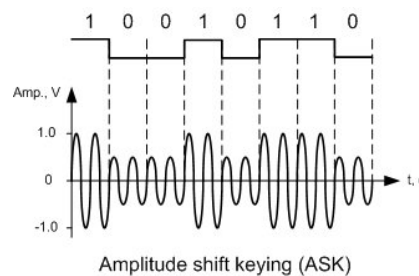
Nous avons eu besoin pour effectuer l'inter-corrélation $R_{xs}(0)$ de disposer d'un symbole de référence $A_0 \sin(2\pi f_0 t)$ parfaitement synchronisé avec le symbole reçu $m(t)$ ce qui exige une récupération de porteuse à partir du signal lui-même. On retrouve alors le problème général de l'ambiguïté de signe sur la porteuse récupérée. Il y a une chance sur deux pour que tous nos bits identifiés par l'inter-corrélation soient globalement contraires de ceux initialement émis. Une solution à ce problème est de faire précéder la transmission utile d'un bloc de données de contrôle à partir duquel le récepteur constate une éventuelle inversion de porteuse et corrige les données utiles en conséquence. Une autre solution est la modulation PSK différentielle :

- On transmet un bit 0 avec un symbole dont la phase est identique à celle du symbole précédent
- On transmet un bit 1 avec un symbole dont la phase est l'opposée de celle du symbole précédent

L'identification correcte des 1 et des 0 est ainsi immunisée contre les inversions globales de phase.

b) ASK

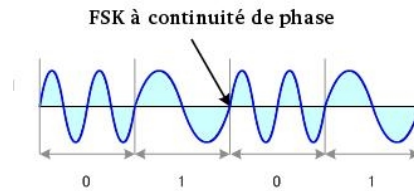
ASK est une modulation d'amplitude, éventuellement en tout ou rien, que l'on obtient avec un commutateur commandé par les bits 0 et 1 pour aiguiller l'une ou l'autre des deux amplitudes de deux oscillateurs permanents vers la sortie $m(t)$



Comme pour toute modulation d'amplitude DBL le spectre du signal modulé n'est rien d'autre que la transposition en fréquence porteuse d'un spectre de NRZ en bande de base et occupe donc une largeur double : $2 f_{\max}$. La démodulation se réduit toujours à un filtre optimal de reconnaissance des deux symboles.

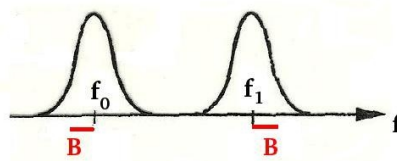
c) FSK

Les 0 et 1 sont codés par des portions de sinusoïdes respectivement de fréquences f_0 et f_1 . Utiliser un VCO dont la fréquence de sortie est pilotée par la tension d'entrée est une solution qui a le mérite de garantir la continuité du signal d'un symbole au suivant ce qui serait plus problématique avec un commutateur commandé par le signal modulant pour connecter la sortie à l'un ou l'autre de deux oscillateurs permanents indépendants.



Des discontinuités de phase produiraient des harmoniques supplémentaires donc un élargissement non souhaitable du spectre. Pour une transition encore plus douce entre les deux fréquences, une variante GFSK introduit un filtre gaussien pour arrondir les transitions du signal de type NRZ qui pilote le VCO. GFSK est aujourd'hui utilisé dans le protocole de communication radio à faible débit Bluetooth.

Le signal peut être considéré comme l'addition de deux modulations ASK en tout ou rien, l'une de fréquence f_0 et l'autre de fréquence f_1 . On en déduit immédiatement le spectre de $m(t)$ et son occupation spectrale : $(f_1-f_0) + 2 B$, avec $B=f_{\max}$ la largeur du spectre en bande de base.



L'encombrement spectral est donc minimisé en réduisant l'écart f_1-f_0 entre les deux fréquences de la modulation, écart qui est le double de l'excursion maximale de fréquence Δf_i que nous avons définie dans le cas général des modulations angulaires analogiques. L'encombrement minimal pour une FSK à continuité de phase est atteint lorsque un temps symbole est occupé par n périodes complètes de fréquence f_1 ou $(n-1/2)$ périodes de fréquence f_0 . Dans ce cas, la durée d'un symbole étant toujours T , on a $T=nT_1 = (n-1/2)T_0$. Pour un spectre de type $\text{sinc}^2()$, $f_{\max}=1/2T=f_1/2n=f_0/(2n-1)$

et l'encombrement spectral :

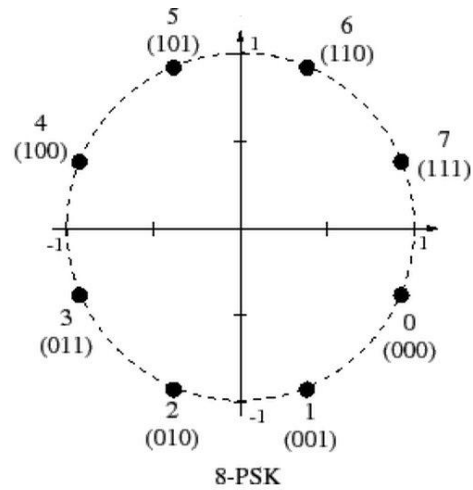
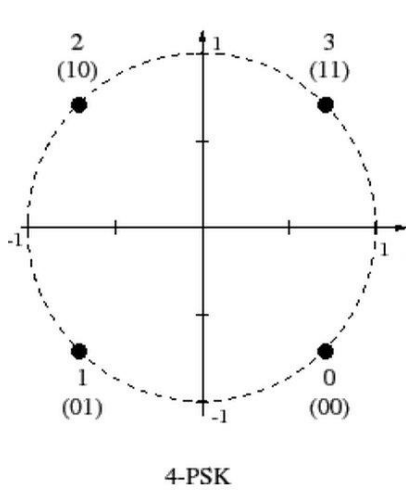
$$(f_1-f_0) + 2 f_{\max} = (2n.f_{\max} - (2n-1).f_{\max}) + 2 f_{\max} = 3 f_{\max}$$

n'est augmenté que de 50 % par rapport au $2 f_{\max}$ d'une modulation ASK ou PSK. Une version GFSK de cette démodulation a été utilisée en GSM.

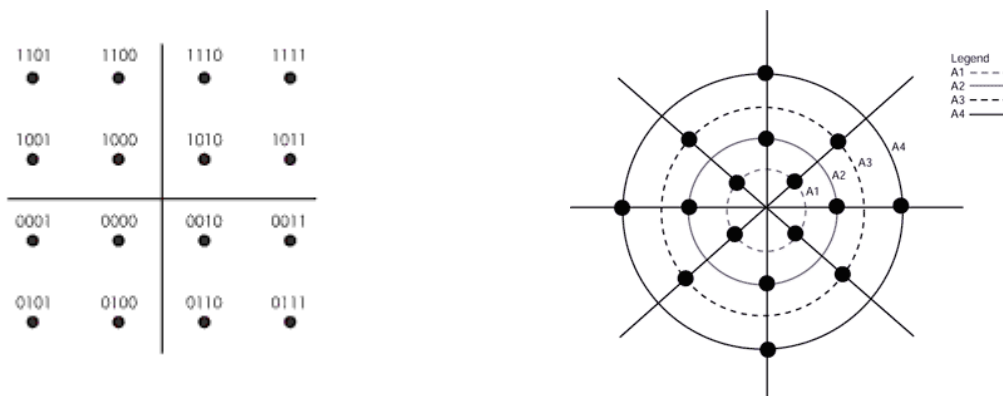
La démodulation s'effectue à nouveau par filtrage optimal pour la reconnaissance des deux symboles.

d) Nous n'avons pas mentionné d'applications modernes des modulations à deux états ASK et PSK car elles représentent le niveau le plus simple et à débit très limité par rapport aux modulations de phase et amplitude-phase à plus de deux états. Ces dernières sont utilisées pour transmettre plusieurs bits par symbole. Plus on transmet de bits par symbole, plus le débit augmente et plus l'encombrement spectral à débit identique diminue, mais cela exige aussi de multiplier le nombre de symboles utilisés.

Une modulation PSK à 4 états utilise 4 symboles de phases différentes, par exemple $(\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4)$, chacun véhiculant 2 bits simultanément, par exemple : 00, 01, 10 et 11. De façon générale, si l'on veut être capable de transmettre n bits simultanément on a besoin de 2^n symboles. Les symboles sont souvent représentés dans le plan complexe par un point M dont le module (distance à l'origine O) est l'amplitude du symbole et la phase (angle entre l'axe des abscisses et OM), la phase du symbole. Dans le cas de la modulation PSK à 4 et 8 états nous avons donc respectivement 4 et 8 points de même amplitude donc sur le cercle trigonométrique :



Évidemment, au fur et à mesure que le nombre de symboles augmente sur le cercle, la distance entre symboles voisins diminue favorisant les confusions et faisant augmenter la probabilité d'erreur en présence de bruit. Une solution pour multiplier les symboles sans diminuer la distance entre voisins est de sortir du cercle en jouant également sur l'amplitude. Ci-après, deux constellations illustrent ces modulations dites Amplitude-Phase, APSK : 3 amplitudes et 12 phases pour la première, 4 amplitudes et 8 phases pour la seconde, et dans les deux cas $16=2^4$ symboles donc 4 bits par symbole transmis.



On ne peut pas augmenter indéfiniment l'amplitude sans violer les limites de puissance autorisées en transmission, et on ne peut pas non plus diminuer indéfiniment la distance entre symboles sans faire exploser la probabilité de confusion entre symboles. Il y a donc, conformément à la formule de Shannon commentée en introduction, un nombre de symboles limité par l'espace amplitude-phase disponible donc un débit limité atteignable contraint par le rapport signal sur bruit sur notre canal. Les modems savent contrôler en temps réel le niveau de bruit sur un lien et choisir en fonction la constellation la plus adaptée pour un débit optimal à tout moment.

La technique de modulation est la même quelle que soit la constellation à plus de deux états. Un symbole donné étant une portion de sinusoïde d'amplitude A et phase φ s'écrit :

$$m(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

ou encore, via la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$:

$$m(t) = A \cos(\varphi) \cos(2\pi f_0 t) - A \sin(\varphi) \sin(2\pi f_0 t)$$

soit

$$m(t) = x \cos(2\pi f_0 t) - y \sin(2\pi f_0 t)$$

Il suffit donc pour fabriquer le symbole $m(t)$ d'accéder aux coordonnées cartésiennes ($x = A \cos(\varphi)$),

$y = A \sin(\varphi)$) du point M de la constellation correspondant au symbole à transmettre et d'effectuer en parallèle les deux modulations d'amplitudes respectives x (modulation de la porteuse $\cos(2 \pi f_0 t)$) et y (modulation de la porteuse $\sin(2 \pi f_0 t)$ dite en quadrature) puis d'émettre la différence entre les deux modulations sur le lien. On parle alors de modulation d'amplitude en quadrature, MAQ.

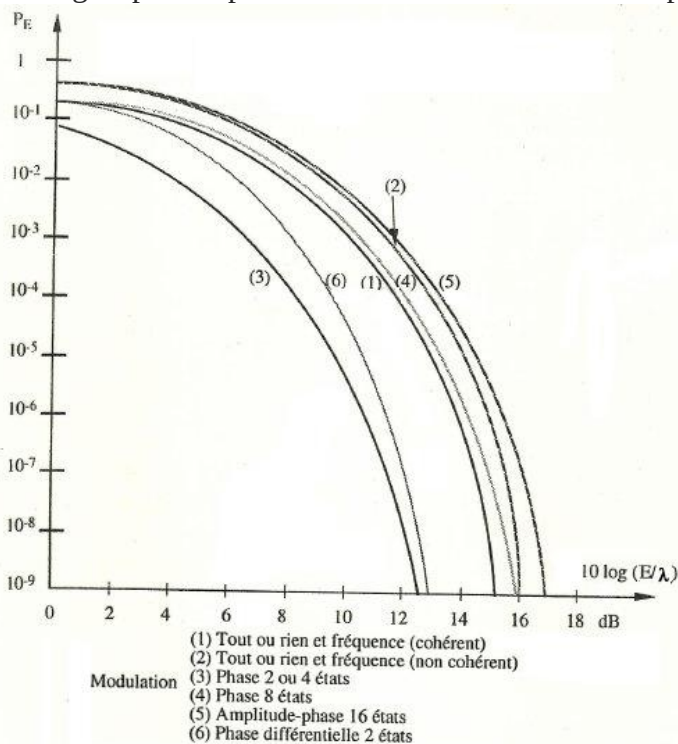
La démodulation s'effectue à nouveau par filtrage optimal pour la reconnaissance des multiples symboles.

Il ne nous reste plus qu'à commenter les courbes en $\text{erfc}()$ ci-contre de probabilité d'erreur en fonction du rapport signal sur bruit pour les différents types de modulation que nous avons abordés. Nous n'avons calculé la formule de P_e que pour la modulation de phase à deux états mais la méthode est la même pour toutes les autres.

Il est dans un premier temps pertinent de comparer les courbes pour les modulations à deux états : PSK est bien meilleure que ASK et FSK. Si ASK et FSK ont les mêmes performances du point de vue de la probabilité d'erreur, n'oublions pas que FSK a un encombrement spectral au moins 50 % supérieur. DPSK a des performances un peu dégradées par rapport à PSK car l'identification d'un bit exploitant le symbole actuel et le symbole précédent il y a deux sources d'erreur. Cependant DPSK reste meilleur que ASK et FSK. ASK et FSK se dégradent encore plus si on n'utilise pas le démodulateur cohérent reposant sur la récupération de porteuse mais un démodulateur reposant sur de simples détecteurs d'enveloppe (redressement par diode suivi d'un circuit capacitif)).

Pour les modulations multi-symboles on s'attend à ce que les performances au bruit diminuent avec le nombre de symboles comme nous l'avons expliqué et c'est en effet ce que nous constatons sur les courbes lorsque l'on passe à 8 puis 16 états mais n'oublions pas que ce défaut peut être largement compensé par la capacité de transmission respectivement triplée et quadruplée (encombrement spectral divisé par 3 et 4). Une curiosité digne d'intérêt est le fait que passer de PSK 2 états à PSK 4 états n'implique par contre aucune dégradation des performances au bruit alors que la capacité de transmission est doublée. Tous ces résultats confirment que les modulations de type APSK multi-symboles doivent s'imposer pour atteindre des hauts débits et que les modems doivent être capables de se replier sur une modulation à moindre nombre de symboles lorsqu'ils détectent une augmentation du taux d'erreurs sur le lien. Les modulations FSK sont réservées à des protocoles de transmissions à faibles débits devant rester simples et économes (Bluetooth, GSM, radiocommandes).

Lorsque de nombreuses sous-porteuses se partagent une large bande passante, opérant en parallèle chacune en APSK sur sa bande étroite, on obtient l'OFDM qui sera détaillé dans le cours traitant des transmissions sans fils. L'OFDM est à la base de la plupart des systèmes de transmission hauts débits modernes (ADSL, WiFi, 4G, TNT).



Probabilité d'erreur en fonction du rapport Energie du signal à densité spectrale du bruit