Cours de

Relativité Restreinte

F Henry-Couannier

Licence L2

Septembre 2010

Plan

Relativité Restreinte

I. La Physique Classique ou Pré-Relativiste

1. La gravitation Newtonienne

Selon la théorie de la gravitation universelle de Newton (1687), toute distribution de masse $\rho_M(x,y,z,t)$ produit un champ gravitationnel **g** (x,y,z,t) donné par

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}=-4\pi G\rho_M$$

Toute masse m plongée dans le champ gravitationnel **g** (x,y,z,t) ainsi calculé est soumise à une force

$$\vec{F}=m\vec{g}$$

2. L'électromagnétisme

1861-64: Maxwell achève la synthèse unifiant tous les phénomènes électriques et magnétiques. Ses équations permettent de calculer les champs électrique **E**(x,y,z,t) et magnétique **B**(x,y,z,t) créés par une quelconque distribution de charges ρ(x,y,z,t) et courants électriques **j**(x,y,z,t).

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

Toute charge q de vitesse **v** plongée dans le champ électromagnétique **E**(x,y,z,t), **B**(x,y,z,t) ainsi calculé est soumise à la force de Lorentz

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

3. La Relation Fondamentale de la Dynamique

La RFD donne l'accélération subie par une masse m soumise aux forces électromagnétiques et gravitationnelles calculées précédemment qui se superposent:

$$m\vec{a}=\sum\vec{F}$$

Il suffit d'intégrer cette équation pour connaître complètement le mouvement de la particule dans le champ de forces. N'importe quel système de charges et masses en interaction peut ainsi être traité en lui appliquant ce jeu de lois très puissantes, les lois de la physique classique, afin d'en déduire son évolution au cours du temps.

4. Les référentiels Galiléens et les autres

Problème: toute science aspire nécessairement à l'universalité et il faut donc se poser les questions : les lois de la physique classique sont elles valides pour n'importe quels observateurs (dans n'importe quel référentiel) (1) ? Sinon pour quels observateurs privilégiés le sont elles et pourquoi (2) ? Que se passe t'il pour les autres observateurs (3) ? Si chaque observateur particulier requiert un traitement spécial afin de déterminer les lois de la physique valides pour lui, et si le nombre d'observateurs possibles est infini, l'idée même que la science est possible risque d'être menacée! Peut on trouver une recette permettant d'exporter les lois de la physique avec possibles modifications dans le référentiel de n'importe quel observateur ou, mieux encore, peut on trouver d'autres lois qui soient valides dans n'importe quel référentiel (4) ?

Réponses:

(1) On constate que la loi de la gravitation universelle et la RFD ne sont valides que pour certains observateurs ou référentiels.

(2) Pas de réponse évidente pour le moment. Par définition un référentiel Galiléen est un référentiel dans lequel ces lois sont valides. Peut être que les référentiels Galiléens sont ceux qui ne subissent aucune accélération par rapport à l'univers tout entier ou seulement une partie de l'univers... Dans ces référentiels, selon la RFD, une particule ne subissant aucune force ne subit aucune accélération. Son mouvement s'effectue donc à vitesse uniforme: elle est donc immobile ou suit une trajectoire rectiligne uniforme. N'importe quel référentiel R' en mouvement à vitesse uniforme **u** par rapport à un référentiel Galiléen R est aussi un référentiel Galiléen. En effet, selon la transformation de Galilée de R à R' la vitesse de la particule **v** dans R et sa vitesse **v'** dans R' sont liées par la relation intuitive **v'** = **v**-**u** donc $\vec{a}'=\vec{a}$ et si l'accélération était nulle dans R elle l'est également dans R' comme il se doit en l'absence de forces dans un référentiel Galiléen.

(3) Soit la lune en rotation autour de la terre. La RFD appliquée à la lune dans R Galiléen géocentrique avec un repère dont les axes sont fixes par rapport aux étoiles s'écrit

$$m\vec{a}=m\vec{g}$$

Dans R' géocentrique dont les axes suivent la rotation de la lune (la lune est immobile dans R')

$$m\vec{a}'=0=m\vec{g}+\vec{f}_e$$

Une pseudo-force d'entrainement dite centrifuge apparaît qui équilibre exactement la gravité: les équations sont donc modifiées dans un référentiel accéléré, ici R' tournant, par rapport à celles d'un référentiel Galiléen.

(4) En physique classique on sait donc exporter les équations dans un référentiel non Galiléen R' en rotation par rapport à R Galiléen. Des pseudo-forces d'entrainement et de Coriolis apparaissent et on est tenté d'écrire une RFD de validité plus générale

$$m\vec{a}=\sum\vec{F}+\vec{f}_e+\vec{f}_c$$

i.e. valide non seulement dans les référentiels Galiléens où les pseudo-forces s'annulent mais aussi dans tous ceux accélérés par rapport à ces derniers. Peut on écrire des équations qui soient encore valides après une reparamétrisation complètement arbitraire (x,y,z,t) ==> (x', y', z', t') ? Essayer de répondre à cette question conduit à la théorie de la Relativité Générale avec des équations valides dans n'importe quel système de coordonnées qui une fois interprétées conduisent à une révolution dans la compréhension de la gravitation. En attendant...

5. L'électromagnétisme pose problème

Les équations de Maxwell et l'expression de la force de Lorentz semblent ne pouvoir être compatibles avec la RFD que dans un seul référentiel Galiléen ! En effet, si on les suppose valides dans R et puisque l'accélération est invariante

$$\vec{a}'=\vec{a}$$

au passage dans R' en translation à vitesse uniforme **u** par rapport à R (ceci est la déduction immédiate de la familière transformation de Galilée de R à R' : $x'=x-u_xt$, $y'=y-u_yt$, $z'=z-u_zt$, $t'=t$) les RFD dans R et R' impliquent:

$$m\vec{a}=\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=q(\vec{E}'+\vec{v}'\times\vec{B}')=\vec{F}'=m\vec{a}'$$

soit en remplaçant **v'** par **v-u** (transformation de Galilée):

$$\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}=\vec{E}'-\vec{u}\times\vec{B}'+\vec{v}\times\vec{B}'$$

L'égalité devant être vérifiée pour n'importe quelle vitesse **v**, on doit donc identifier de part et d'autre les termes indépendant et dépendant de **v** soit pour ces derniers: **B**=**B'**. Cette invariance du champ magnétique est impossible car une charge immobile dans R ne crée pas de champ magnétique tandis que dans R' la même charge en mouvement à la vitesse **-u** devrait en créer un d'après les équations de Maxwell. Conclusion : en supposant valide la transformation de Galilée, si la RFD et l'expression de la force de Lorentz qui étaient valides dans R le sont encore dans R', on vient de montrer que les équations de Maxwell ne peuvent plus l'être simultanément.

Mais on peut aussi mettre en évidence plus directement la non invariance des équations de Maxwell sous les transformations de Galilée, autrement dit, si on admet les transformations de Galilée, que les équations de Maxwell ne peuvent être à la fois vraies dans R et R'. En effet, si ces équations sont supposées vraies dans n'importe quel référentiel

Galiléen, elles conduisent par exemple dans R à l'équation de propagation: $\Delta\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$ mais aussi dans n'importe quel autre R' Galiléen à:

$$\Delta'\vec{E}'-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial t'^2}=0$$

toutes ces équations ayant pour solution une onde électromagnétique se propageant à la même vitesse $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ dans tous ces référentiels ! Ceci est évidemment incompatible avec la transformation de Galilée selon laquelle si la vitesse est **c** dans R elle doit être **c-u** dans R' quel que soit le phénomène considéré, y compris bien sûr la lumière.

La situation est grave: nous étions en quête de lois universelles, au moins valables dans tous les référentiels Galiléens, et réalisons que, si la transformation de Galilée est correcte, les lois de électromagnétisme, telles que nous les connaissons, ne peuvent être valides que dans un sous ensemble très restreint de référentiels Galiléens immobiles les uns par rapport aux autres, et fausses dans tous les autres en mouvement par rapport à ces derniers.

6. Principe de Relativité

Nous recherchons des lois naturelles qui gardent la même forme dans tous les référentiels Galiléens (toujours tout simplement pour ne pas avoir à chercher les nouvelles lois valides à chaque fois que nous considérerons un nouveau référentiel). De telles lois sont dites invariantes ou encore covariantes. Par exemple, sous changement de référentiel Galiléen de R à R', nous aimerions que l'expression de la force de Lorentz ne soit pas modifiée:

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\rightarrow\vec{F}'=q'(\vec{E}'+\vec{v}'\times\vec{B}')$$

avec v':(dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt'). La covariance signifie que tous les objets figurant dans les équations peuvent se transformer (changer de valeur), ainsi les coordonnées x,y,z,t et les champs **E** et **B**, mais les relations qui les lient restent inchangées lorsque l'on passe de R à R'. Nous allons maintenant voir que c'est le Principe de Relativité qui peut nous aider à donner à cette propriété mathématique un contenu plus physique.

Le Principe de Relativité est celui selon lequel si deux observateurs liés à deux référentiels Galiléens font la **même** expérience (Jacques sur sa table dans le train en mouvement à vitesse uniforme et Paul sur une table identique sur le quai de la gare), ils doivent obtenir les mêmes résultats. Ceci signifie que Jacques ne peut pas mettre en évidence le mouvement du train par rapport au quai à partir des résultats de son expérience. Il ne peut le faire qu'en regardant par la fenêtre défiler le quai. Pour que le Principe de Relativité soit vérifié il est clair qu'une condition nécessaire est que les lois de la physique prennent la même forme dans tous les référentiels Galiléens, car des lois différentes impliqueraient à coup sûr des phénomènes différents donc des résultats différents pour les expériences effectuées par Jacques et Paul. C'est pourquoi la non covariance des équations de Maxwell sous transformations de Galilée semble aussi ruiner définitivement le Principe de Relativité. Or ce principe qui était déjà au cœur de la mécanique Newtonienne, les physiciens y étaient très attachés. Suffirait il de rendre covariantes les équations de Maxwell en les modifiant pour s'assurer de respecter le Principe de Relativité ? Hélas non car si la covariance est une condition nécessaire pour que soit satisfait le Principe de Relativité elle n'est cependant pas suffisante. En effet, même s'il est toujours possible de rendre covariante sous certaines transformations une équation qui ne l'était pas initialement en y rajoutant des termes, la nouvelle équation covariante obtenue de cette manière en général ne respectera toujours pas le Principe de Relativité. Par exemple, en y rajoutant les termes correspondant aux pseudo forces d'entrainement et de Coriolis nous avons pu proposer une RFD invariante sous accélérations alors que la RFD initiale ne l'était pas. Ces termes décrivaient alors tous les effets physiques nouveaux qui survenaient du simple fait de passer des référentiels Galiléens à ces référentiels accélérés. De même, pourrait on envisager de rajouter des termes dans les équations de Maxwell de manière à ce que les équations ainsi modifiées soient covariantes sous changement de référentiel Galiléen. Ces nouveaux termes décriraient donc de façon analogue de nouveaux phénomènes physiques qui apparaitraient du seul fait de se placer dans des référentiels Galiléens en mouvement à vitesse **u** par rapport aux référentiels Galiléens privilégiés ou les équations de Maxwell prenaient la forme plus simple que nous connaissons. Ces nouveaux termes dépendraient donc de **u** et à cause d'eux Jacques dans R et Paul dans R' constateraient des différences entre leurs expériences, **u** n'ayant pas la même valeur dans R et R'. Le Principe de Relativité serait à nouveau violé. Une condition nécessaire supplémentaire pour que le Principe de Relativité soit respecté est donc que les lois de la physique, en plus d'être covariantes sous changement de référentiel inertiel (appelés encore changement de vitesse ou boosts), ne fassent pas intervenir explicitement de vitesse **u** par rapport à un référentiel absolu.

Insistons sur le fait que le Principe de Relativité s'énonce en comparant deux expériences rigoureusement identiques ce qui implique entre autres qu'elles soient strictement soumises aux mêmes conditions physiques externes. Il faut donc les considérer complètement isolées de toute influence extérieure susceptible d'affecter différemment l'expérience de Jacques et celle de Paul comme par exemple le vent s'engouffrant par la fenêtre du Wagon ou se trouve Jacques mais imperceptible sur le quai de Paul. Par exemple, bien que les lois de la mécanique classique vérifient le Principe de Relativité (avec covariance sous transformations de Galilée) on met facilement en évidence dans le référentiel lié à une source d'ondes à la surface d'un bassin les effets du déplacement à vitesse u de cette source par rapport au bassin (nouvelle expérience de Jacques): du point de vue de cette source, les ondes émises dans la direction de son mouvement n'ont pas la même vitesse c-u que celles émises en direction opposée c+u. Au contraire, une source immobile par rapport au bassin (nouvelle expérience de Paul) mesurerait la même vitesse c des ondes dans toutes les directions. Mais si ces deux nouvelles expériences ne donnent pas les mêmes résultats c'est maintenant seulement parce que ce ne sont pas en fait les mêmes expériences: dans l'une d'elles, du point de vue de la source, il y a un fluide immobile et dans l'autre un fluide en mouvement à vitesse -**u.** Si on considère que le fluide est un facteur externe, on dira de façon équivalente que ces expériences d'étude des ondes sont sous l'influence physique de ce facteur externe qui affecte différemment les deux expériences. Le Principe de Relativité ne saurait donc être menacé dans ce cas.

7. Issues possibles

Puisque les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous transformations de Galilée il nous faut soit renoncer aux équations de Maxwell, en tout cas sous la forme que nous connaissons puisque leur validité ne pourrait qu'être limitée à une classe de référentiels beaucoup trop restreinte (choix 1) soit à la transformation de Galilée (choix 2).

- <u>Choix 1: La transformation de Galilée est correcte.</u> Ce sont les équations de Maxwell qui ne sont effectivement valides que dans un des référentiels privilégiés immobiles les uns par rapport aux autres, liés à ce que les physiciens ont appelé l'éther**,** disons R. Dans tout autre référentiel Galiléen R' se déplaçant à la vitesse uniforme **u** par rapport à R, des nouveaux effets doivent se manifester dépendant de **u**. En particulier, les ondes lumineuses doivent se propager à la vitesse **c-u** dans R' au lieu de **c** dans R. Comme dit précédemment, on doit pouvoir modifier les équations de l'électromagnétisme de façon à ce qu'elles intègrent explicitement les nouveaux effets dépendant de **u** et soient valides dans tous les référentiels Galiléens i.e. invariantes sous transformation de Galilée. Mais de telles équations modifiées sensibles à la valeur de **u** seraient encore comme nous l'avons expliqué en violation du Principe de Relativité. Confronté à cette situation deux alternatives se présentent: Soit

  a) on considère que si les nouvelles lois de l'électromagnétisme violent le Principe de Relativité c'est seulement parce qu'elles **<u>ne sont pas fondamentales</u>** (approche de Fresnel) mais décrivent des phénomènes influencés par un milieu matériel élastique externe, sorte de fluide baignant l'univers et dont on postule l'existence. On l'appelle éther et on imagine que les champs **E** et **B** sont produits par des déformations de l'éther qui se propagent comme des ondes dans un fluide. Dans ce cas, nos expériences électromagnétiques peuvent bien mettre en évidence le mouvement à vitesse **u** par rapport à l'éther (le vent d'éther) sans en fait menacer le Principe de Relativité de même que l'analyse des expériences d'émission d'ondes à la surface du bassin envisagées au paragraphe précédent ne le menaçait pas. C'est que ces expériences électromagnétiques ne sont, elles non plus, pas isolées mais au contraire influencées physiquement par cet éther qui affecte de façon différente les expériences correspondant à différentes valeurs de **u**. Mais on espère bien que d'autres lois plus fondamentales à découvrir (que l'on applique au « fluide » éther pour en déduire celles, effectives, de l'électromagnétisme) doivent vérifier encore le Principe de Relativité tout comme les lois de la mécanique le respectent.

  b) on considère que les nouvelles lois **<u>sont fondamentales</u>** (approche de Lorentz) et donc on renonce bel et bien au Principe de Relativité comme pilier fondateur de la physique. Dans ce cas, l'éther complètement immatériel n'est rien d'autre que la donnée du référentiel privilégié R.

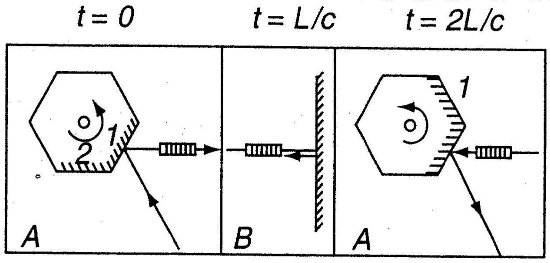
- <u>Choix 2: La transformation de Galilée est fausse</u> et on doit la remplacer par une transformation qui laisse invariantes les équations de Maxwell par changement de référentiel inertiel. Il faudra donc que la nouvelle transformation assure l'invariance de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels inertiels. En effet, c'est ce qu'imposent les équations de Maxwell si elles sont vraies dans tous ces référentiels. Mais la RFD ne sera probablement plus invariante sous la nouvelle loi de transformation et il faudra la modifier également pour qu'elle le devienne. Si la RFD ainsi modifiée n'inclut pas explicitement une vitesse **u** par rapport à un référentiel privilégié, elle satisfera le Principe de Relativité qui sera donc sauvé étant déjà respecté par les lois de l'électromagnétisme: ces dernières n'incluent en effet pas explicitement de vitesse **u** par rapport à un référentiel privilégié et seront invariantes sous les nouvelles transformations.

8. Les expériences doivent trancher

Au XIXème siècle personne en réalité ne conçoit que l'on puisse renoncer aux transformations de Galilée qui semblent aller de soit. Celles-ci en particulier supposent l'existence d'un temps absolu, i.e qui s'écoule à la même vitesse pour tous les observateurs: si R et R' ont choisi une origine des temps commune t=t'=0, leurs horloges resteront synchronisées: t=t' ce que personne ne songerait à remettre en question. Elles conduisent aussi à la composition des vitesses **v'** = **v**-**u** alors que les lois de l'électromagnétisme impliquent qu'un phénomène, la lumière, a la même vitesse pour tous les observateurs ce qui paraît absurde. C'est pourquoi les physiciens s'acharnent à essayer de mettre en évidence les faibles effets de l'existence d'un éther, milieu de propagation des ondes électromagnétiques, i.e la vitesse **u** de l'observateur par rapport au référentiel lié à cet éther. Pour un tel observateur, pensent ils, la vitesse de la lumière n'est plus **c** comme dans R lié à l'éther mais **c**'=**c**-**u**.

A. Mesure directe de c

Par la méthode de l'octogone de Foucault tournant à la fréquence de rotation f, le temps d'aller retour T = 1/8f

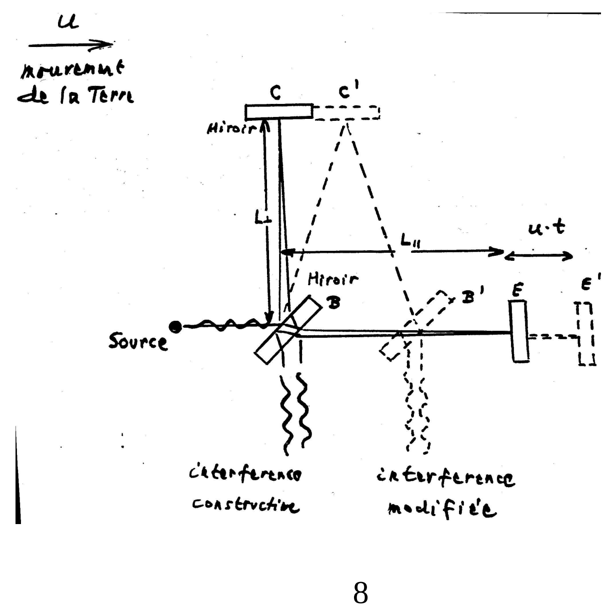


= 2L/c de la lumière est obtenu lorsque l'image en retour est stationnaire i.e. lorsque les réflexions sur l'octogone se font sous le même angle à l'aller et au retour. Avec L=35 km et f=530 trs/s on obtenait au début du XX ème siècle c=299796±4 km/s.

Si c est la vitesse de la lumière dans R lié à l'éther, on peut penser que **u,** la vitesse de R' lié à la terre par rapport à R peut être de l'ordre de 30km/s, la vitesse de la terre autour du soleil. Si, dans l'expérience, la lumière se propage dans la même direction que **u**, le temps aller retour dans R' n'est plus 2L/c comme dans R mais $T_{//}$=L/(c+u)+L/(c-u)=(2L/c)/(1-(u/c)^2). Par contre le temps aller retour est de $T_\perp$=(2L/c)/(1-u^2/c^2)$^{1/2}$ si dans R' la lumière se propage perpendiculairement à **u**. La différence relative entre$T_\perp$ et $T_{//}$ donc sur la mesure de la vitesse de la lumière n'est donc que du second ordre en u/c, soit ~ 10^{-8}. On était loin de pouvoir mettre en évidence par la mesure directe un tel écart de 3m/s. Il faudra attendre la fin des années 80 pour de telles précisions.

Comme par ailleurs la théorie de l'éther formulée par Fresnel permettait de calculer correctement la vitesse de la lumière dans un milieu matériel v=c/n, n étant l'indice du milieu, et même décrivait correctement comment cette vitesse était affectée dans un milieu en mouvement entrainant l'éther avec lui (la loi de la réfraction de Descartes, $n_1$sin i_1 =$n_2$sin i_2 en était même déduite et les résultats d'expériences manifestant en réalité des effets relativistes comme celle de Fizeau étaient en remarquable accord avec cette théorie), on eu encore de bonnes raisons de parier sur l'éther jusqu'à l'expérience cruciale de Michelson.

B. Mesure interférométrique de c



Les théories classiques de l'éther étaient capables d'expliquer l'absence (en général) ou la présence (expérience de Fizeau) d'effets d'ordre u/c. Pour trancher il fallait donc atteindre la précision de l'ordre $(u/c)^2$. C'est ce que fit l'expérience de Michelson sensible à la différence des temps d'aller-retour dans deux bras d'un interféromètre l'un parallèle et l'autre orthogonal à **u**. En tournant l'interféromètre de 90° le rôle des bras est permuté et la différence de temps de vol qui était $T_\perp - T_{//}$ devient $T_{//} - T_\perp$. Le décalage temporel au premier ordre en u/c (u/c <<1) est donc de $2L/c\ (u/c)^2$ et la différence de marche correspondante est de $2L(u/c)^2$. Avec L=11m et en travaillant à une longueur d'onde λ_0 =550nm, la différence de marche est de 0.4 λ_0 et le déplacement correspondant des franges d'interférence devrait donc être de 0.4 frange. Aucun déplacement significatif n'a été constaté bien que l'expérience ait été sensible à un déplacement de 0.02 franges. L'expérience a été répétée un grand nombre de fois entre 1900 et 1930 confirmant la constance de la vitesse de la lumière.

Pour sauver la physique classique trois échappatoires se présentaient:

a. **La terre entraîne l'éther (théorie de Fresnel)** ce qui annule l'effet attendu dans l'expérience de Michelson mais annule aussi l'effet classique d'aberration des étoiles pourtant observé.

b. **Les objets en mouvement à la vitesse u par rapport au référentiel privilégié absolu qu'est l'éther voient leur dimension multipliée par $(1-(u/c)^{2})^{1/2}$ (donc raccourcie) dans la direction du mouvement (théorie de Lorentz)** de sorte que $T_{//}=T_\perp=2L/c\ (1+1/2(u/c)^2)$ et il n'y a plus de différence de marche. Par contre, si les longueurs des deux bras sont inégales, une différence de marche dépendante de $(u/c)^2$ mais insensible à l'orientation de l'interféromètre subsiste. Elle ne peut être mise en évidence qu'en étudiant le déplacement éventuel des franges au fur et à mesure que **u** varie au cours du temps. L'expérience de Kennedy et Thorndike exclue **u** > 10km/s.

c. **La vitesse dans le vide de la lumière est la constante universelle c dans le référentiel lié à l'émetteur (théorie de Ritz).** Elle est donc la même dans les deux bras de l'interféromètre dans R' et il n'y a plus de différence de marche. Les équations de Maxwell doivent être complètement abandonnées. Mais la théorie conduit à des décalages temporels à la réception entre les signaux émis par les étoiles de systèmes binaires n'ayant pas la même vitesse par rapport à nous, phénomène non observé.

Chacune de ces propositions conduisant donc à des prédictions entrant en conflit avec des observations, il faut se résoudre à admettre le résultat si inattendu: la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels Galiléens, et à en tirer les conséquences.

II. La Transformation de Lorentz Unifie l'Espace et le Temps

1. Les deux Postulats de la Relativité

En 1905 Einstein énonce les deux postulats de la Relativité

A. Toutes les lois de la physique obéissent au **Principe de Relativité.**

B. La vitesse de la lumière est une constante universelle qui a la même valeur c dans tous les référentiels Galiléens. Elle est donc indépendante du mouvement de la source et de la direction de propagation (isotrope).

Les deux postulats sont solidaires du choix qu'impose le résultat négatif de l'expérience de Michelson: il faut rejeter les transformations de Galilée incompatibles avec la constance de c et les équations de l'électromagnétisme pourront être gardées à condition qu'elles soient invariantes sous les nouvelles transformations qui s'imposent en remplacement de celles de Galilée: les transformations de Lorentz. La RFD devra être remplacée par une équation invariante sous les transformations de Lorentz.

2. Symétries

Le principe de relativité n'est qu'un exemple parmi d'autres de principe de symétrie. Le principe de symétrie sous translations temporelle et spatiale stipule qu'aucune expérience de physique ne permet de distinguer un point de l'espace d'un autre ou un instant d'un autre. Le principe de symétrie sous rotation stipule qu'aucune expérience de physique ne permet de distinguer une direction d'une autre. Le principe de symétrie sous réflexion dans un miroir stipule qu'aucune expérience de physique ne permet de distinguer le comportement des objets gauchers et droitiers (leurs évolutions sont symétriques par réflexion) etc...jusqu'au principe de relativité qui, nous l'avons vu, stipule qu'aucune expérience de physique ne permet de distinguer une vitesse d'une autre dans l'univers. Tous ces principes sont d'une extrême importance car ils restreignent énormément les équations susceptibles de les satisfaire i.e d'être invariantes sous les multiples transformations correspondantes. A tel point qu'ils sont un outil très efficace pour trouver les bonnes équations de la physique en complément des données expérimentales comme la suite du cours se propose de le montrer. Notons que les expériences de physique permettent facilement de mettre en évidence le fait qu'un référentiel est accéléré par rapport aux référentiels Galiléens. Il n'y a donc pas de principe de symétrie sous accélération. Pourtant comme nous l'avons déjà évoqué il est possible de trouver des équations invariantes sous accélérations, par exemple celles de la Relativité Générale. Mais celles-ci doivent intégrer explicitement les effets de telles accélérations dans leur formalisme.

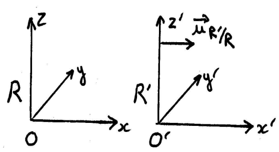
Pour comprendre le tableau récapitulatif de la page suivante, il suffit de se rappeler qu'une loi covariante est une loi qui garde la même forme sous changement de référentiel. Par exemple $\partial Ex/\partial x + \partial Ey/\partial y + \partial Ez/\partial z = \rho/\varepsilon_0$ dans R et $\partial E'x/\partial x' + \partial E'y/\partial y' + \partial E'z/\partial z' = \rho'/\varepsilon_0$ dans R'. Une loi symétrique sous translation spatio-temporelle, rotation et changement de vitesse, est une loi qui ne permet de distinguer aucune position ou instant, orientation ou vitesse dans l'univers. Cela signifie qu'aucune expérience testant cette loi ne permet de mettre en évidence à quel moment et en quel lieu nous la faisons ni quelle orientation a le dispositif expérimental. Aucune ne permet enfin de mettre en évidence à quelle vitesse elle se déplace. La symétrie sous changement de vitesse n'est rien d'autre que le principe de relativité. Pour que la symétrie soit respectée par les lois il faut bien sûr qu'elles n'intègrent pas explicitement de dépendance dans la position ou instant, orientation ou vitesse par rapport à une référentiel absolu.

Tableau récapitulatif

Transformation R → R'	Paramètres et exemples de lois de transformation	Lois covariantes et symétriques	Lois non covariantes valides dans le(s) seul(s) R privilégiés	Lois covariantes et non symétriques
Translations temporelles	Δt $t' = t + \Delta t$	Toutes les lois de la physique classique car ne dépendent pas explicitement de t		
Translations spatiales	$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ $x' = x + \Delta x$ $y' = y + \Delta y$ $z' = z + \Delta z$	Idem car ne dépendent pas explicitement de x, y, z		
Rotations	Angles $\theta x,\ \theta y,\ \theta z$ $x' = x$ $y' = \cos(\theta x)\, y - \sin(\theta x)\, z$ $z' = \sin(\theta x)\, y + \cos(\theta x)\, z$	Idem car exprimées sous forme vectorielle		
Changements de vitesse (boosts) de Galilée	$\mathbf{u}_{R'/R}$ $x' = x - u_x t$ $y' = y - u_y t$ $z' = z - u_z t$ $t' = t$	RFD Classique	Équations de Maxwell →	Équations de Maxwell modifiées intégrant explicitement $\mathbf{u}_{R'/R}$
Changements de vitesse (boosts) de Lorentz	$\mathbf{u}_{R'/R}$ Transformations de Lorentz	<u>**Relativité Restreinte**</u> Équations de Maxwell RFD Relativiste	RFD Classique →	RFD Classique modifiée intégrant explicitement $\mathbf{u}_{R'/R}$
Accélérations	$\mathbf{a}_{R'/R}$		RFDs et presque toutes les lois →	RFDs et autres lois modifiées intégrant explicitement $\mathbf{a}_{R'/R}$: les pseudo-forces
Reparamétrisations quelconques dites générales	$\partial x'/\partial x; \partial x'/\partial y; \partial x'/\partial z; \partial x'/\partial t$ $\partial y'/\partial x; \partial y'/\partial y; \partial y'/\partial z; \partial y'/\partial t$ $\partial z'/\partial x; \partial z'/\partial y; \partial z'/\partial z; \partial z'/\partial t$ $\partial t'/\partial x; \partial t'/\partial y; \partial t'/\partial z; \partial t'/\partial t$		RFDs et presque toutes les lois →	<u>**Relativité Générale**</u> RFDs et autres lois modifiées intégrant explicitement les effets des reparamétrisations.

3. De l'invariance de c aux transformations de Lorentz

Établissons l'expression des transformations de Lorentz entre deux référentiels R et R' munis de repères aux axes y et z parallèles et x confondus, en mouvement relatif de vitesse u dans la direction de l'axe x. Les origines des temps communes t=t'=0 ont été fixées à l'instant passé où O et O' coïncidaient. Des rotations et translations dans l'espace et le temps permettent toujours de ramener le cas général de deux référentiels Galiléens quelconques à ce cas particulier:



On peut montrer que les relations entre x,y,z,t et x',y',z',t' doivent être linéaires en remarquant par exemple que si x' est une certaine fonction F(x, y, z, t) de x, y, z et t, alors :

$$dx'=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial t}dt$$

expression dans laquelle les dérivées partielles de F ne doivent pas dépendre de x, y, z ou t pour éviter que la transformation de dx en dx' dépende de la position ou l'instant où nous l'appliquons ce qui serait en violation du principe de symétrie sous translations spatio-temporelles (cf tableau page précédente). Toutes les dérivées partielles étant des constantes, on est donc autorisé à écrire $dx'=l_{11}dx+l_{12}dy+l_{13}dz+l_{14}dt$ et de même des relations à coefficients constants donnant dy', dz' et dt' qui s'intègrent en relation linéaires entre x, y, z, t et x', y', z', t':

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{bmatrix}$$

La condition que O et O' coïncident à t=t'=0 implique $x_0=y_0=z_0=t_0=0$. Les conditions y=0 ==> y'=0 et z=0 ==> z'=0 annulent tous les coefficients de la deuxième et troisième ligne de la matrice sauf l_{22} et l_{33}. La condition x=0, t=0 ==> x'=0,t'=0 annule l_{12} , l_{13} , l_{42} et l_{43}. Finalement:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & l_{14} \\ 0 & l_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} & 0 \\ l_{41} & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

nous avons donc la relation entre y' et y : $y' = l_{22}(u_{R'/R}).y$ mais aussi $y = l_{22}(-u_{R'/R}).y'$ via la transformation inverse puisque $u_{R'/R} =-u_{R/R'}$. Par conséquent $l_{22}(-u_{R'/R})=1/l_{22}(u_{R'/R})$. Mais **u** étant dirigée suivant l'axe des x, il n'y a aucune raison que y'/y distingue **u** de -**u** (isotropie de l'espace) donc $l_{22}(-u_{R'/R})=l_{22}(u_{R'/R})$. On déduit des deux égalités précédentes que $l_{22}=1$ et on peut suivant le même principe montrer que $l_{33}=1$.
Les coefficients restants s'obtiennent en remarquant que la trajectoire d'un rayon de lumière émis en O à t=0 doit vérifier $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ (1) mais aussi $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$ car ce rayon de lumière émis en O' à t' = 0 se propage aussi à la vitesse c dans R'. Mais dans cette dernière relation on peut remplacer x', y', z', t' par leurs expressions en fonction de x,y,z,t ce qui nous donne: $(l_{11}x+l_{14}t)^2+y^2+z^2=c^2(l_{41}x+l_{44}t)^2$ (2). La différence (1) – (2) conduit alors par identification des termes au système:

$$\frac{l_{14}}{l_{44}}=c^2\frac{l_{41}}{l_{11}}=-u$$
$$l_{11}^2-c^2l_{41}^2=1$$
$$l_{14}^2-c^2l_{44}^2=-c^2$$

de 3 équations à 4 inconnues qui devront donc dépendre d'un paramètre, que l'on appelle ici u. En reportant les expressions de l_{14} et l_{41} tirées de la première équation dans les deux dernières équations on obtient finalement les 4 inconnues en fonction de u d'où les Transformations de Lorentz

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(x-ut)$$
$$y'=y$$
$$z'=z$$
$$t'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(t-u\frac{x}{c^2})$$

Nous avons été bien inspirés d'appeler notre paramètre u qui est bel et bien la vitesse de R' par rapport à R car dans le régime des faibles vitesses u << c on doit retrouver les Transformations de Galilée en bonne approximation, ce qui est bien le cas:

$$x' = x - ut$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

De plus, la trajectoire de O' (x'=0, y'=0, z'=0) est bien suivant ces équations x=ut , y=0, z=0 dans R. Le référentiel R' se déplace bien à la vitesse uniforme u suivant la direction x par rapport à R.

Avec les transformations de Lorentz on remarque que l'espace et le temps peuvent se transformer l'un en l'autre un peu comme les coordonnées spatiales se transforment les unes dans les autres sous rotations. Un lien très intime est établi entre les notions d'espace et de temps, on parlera désormais d'espace-temps, et ce lien éclaire plus qu'en physique classique la nature du temps. Ce lien peut se voir comme une sorte de symétrie sous permutation entre x et ct dans les transformations (une vitesse c doit intervenir si on convient que l'on ne peut permuter les rôles que de grandeurs homogènes x et ct, contrairement à x et t). Ce lien, un physicien aurait même pu trouver intérêt à l'exiger sans même y avoir été contraint par l'expérience comme cela fut le cas. En effet, les transformations de Lorentz peuvent être réécrites sous la forme

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\left(x - \frac{u}{c}ct\right) = \gamma(x - \beta ct)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\left(ct - \frac{u}{c}x\right) = \gamma(ct - \beta x)$$

avec

$$\beta = \frac{u}{c} ; \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$$

forme symétrique sous la permutation x,x' <=>ct, ct'. γ et β sont souvent introduits pour simplifier les écritures. Exiger à l'avance cette symétrie sous permutation aurait permis de trouver très facilement les transformations de Lorentz y compris l'indispensable facteur γ (fait en TD) sans même supposer l'existence d'une vitesse c invariante.

Ainsi donc, les transformations de Lorentz manifestent une « symétrie » entre l'espace et le temps qui aurait même permis de les déduire plutôt que de faire appel à l'expérience qui nous a imposé la constance de c. Il serait mesquin de faire remarquer que les transformations de Galilée vérifient aussi cette symétrie sous permutation à condition de poser c égal à l'infini. Dans ce cas, en effet, ct infini n'est même plus une variable et la pertinence physique de la symétrie sous permutation est loin d'être évidente sauf peut être dans un contexte théorique où c serait un paramètre prenant une valeur particulière pour chaque univers dans un ensemble d'univers. Alors c infini correspondrait à un cas limite. Mais d'un point de vue plus standard, les transformations de Lorentz apportent un plus par rapport à celles de Galilée puisqu'elles mettent pour la première fois vraiment en évidence la probable pertinence physique d'une symétrie sous permutation entre x et ct. Un des postulats de la physique classique était l'existence d'un temps absolu et d'un espace à 3 dimensions que l'on se donnait et paramétrait séparément: aucun lien n'existant entre les deux concepts, les transformations de Galilée pouvaient donc paraître largement arbitraires contrairement à celles de Lorentz. Toute science a pour objectif de rendre compte du plus grand nombre de phénomènes possibles à partir du plus petit nombre de postulats ou principes. Lorsqu'on parvient à faire l'économie de choix arbitraires, les principes portent vraiment en eux toute la construction théorique qui en découle par la seule déduction logique, comme il se doit pour de la science digne de ce nom.

Certains regretteront que le sens commun, cette idée selon laquelle le réel décrit par la science devrait correspondre à celui de notre expérience familière, soit sacrifié comme nous allons le voir avec les nouvelles transformations. La leçon de la relativité est que la science ne doit être guidée que par les résultats d'expériences et l'exigence d'économie.

En inversant les lois on doit bien sûr retrouver celles que l'on obtient en substituant -u (vitesse de R/R') à u (vitesse de R'/R).

$$x=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(x'+\frac{u}{c}ct')=\gamma(x'+\beta ct')$$
$$y=y'$$
$$z=z'$$
$$ct=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(ct'+\frac{u}{c}x')=\gamma(ct'+\beta x')$$

ou encore sous forme matricielle en introduisant la matrice de Lorentz L:

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

La donnée de (x_i,y_i,z_i,t_i) caractérise un événement E_i se produisant à la position de coordonnées (x_i,y_i,z_i) et à l'instant t_i dans R. Trivialement, la transformation étant linéaire elle s'applique aussi bien à des différences de coordonnées ($\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta y=y_2-y_1$, $\Delta z=z_2-z_1$, $\Delta t=t_2-t_1$) de deux événements E_1 et E_2 , donc également à des différentielles (dx,dy,dz,dt). Elle éclaire le lien fondamental entre espace et temps en précisant ce qui différencie espace et temps. Le changement de variable u/c=thθ permet en effet de réécrire les transformations de Lorentz:

$$\Delta x'=ch(\vartheta)\Delta x-sh(\vartheta)c\Delta t$$
$$\Delta y'=\Delta y$$
$$\Delta z'=\Delta z$$
$$c\Delta t'=ch(\vartheta)c\Delta t-sh(\vartheta)\Delta x$$

qui met en évidence que la transformation d'un référentiel à un autre référentiel se déplaçant à vitesse uniforme u en direction de l'axe des x par rapport au premier est une « rotation hyperbolique » dans l'espace x,ct à comparer à une rotation classique affectant par exemple les coordonnées spatiales x et y. On sait que les rotations laissent invariantes la distance au carré $d^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$ et il est immédiat de vérifier en remplaçant Δx',Δy',Δz',cΔt' par leurs expressions en fonction de Δx,Δy,Δz,cΔt que les transformations de Lorentz laissent invariantes $\Delta s^2=c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2$, Δs étant appelé intervalle spatio-temporel entre les événements E_1 et E_2. Remarquons au passage que ct se comporte comme la partie imaginaire d'une dimension spatiale supplémentaire χ qui serait imaginaire pure: χ =ict! En conclusion, en passant de R à R' la distance spatiale d et l'intervalle temporel Δt varient ensemble de telle sorte que Δs reste invariant. Nous allons en explorer les conséquences.

4. Le groupe de Lorentz

Les transformations de Lorentz incluent toutes les transformations entre référentiels Galiléens laissant invariante la vitesse de la lumière. Elles ne se réduisent donc pas aux transformations de changement de vitesse ou boosts sur lesquelles notre attention s'est concentrée au paragraphe précédent mais incluent également les rotations et les translations de l'espace tridimensionnel. L'ensemble de toutes ces transformations possède une structure de groupe. Il est appelé groupe inhomogène de Lorentz ou groupe de Poincaré. En excluant les translations, on obtient le groupe homogène de Lorentz. Les transformations de Lorentz dépendent de paramètres: angle pour les rotations, décalage temporel ou spatial pour les translations, vitesse pour les boosts que l'on peut faire tendre vers zéro. Toute transformation de Lorentz peut donc être convertie via une variation continue de ses paramètres en une transformation obtenue lorsque ceux-ci s'annulent. Le processus aboutit à quatre transformations possibles de (ct, x, y, z): l'identité I, l'inversion du temps T ==> (-ct, x, y, z), l'inversion de l'espace ou Parité P ==> (ct, -x, -y, -z),ou l'inversion de l'espace et du temps PT ==> (-ct, -x, -y, -z). Matriciellement

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};T=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};PT=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Les transformations qui aboutissent à deux distincts d'entre ces 4 types ne peuvent être transformées continûment les unes dans les autres. Dans la suite du cours nous ne traiterons que du sous groupe dit propre des transformations que l'on peut ramener à l'identité par transformation continue des paramètres. La pertinence physique des autres transformations qui intègrent des symétries dites discrètes d'inversion de l'espace et/ou du temps est certaine mais devra faire l'objet d'un traitement dédié qui sort du cadre de ce cours.

5. Conséquences des transformations de Lorentz

Nous avons déjà remarqué que lorsque u devient petit devant c tous les effets qui distinguent la Transformation de Lorentz de celle de Galilée décroissent rapidement puisqu'ils ne dépendent que du carré $(u/c)^2$ ce qui les rend complètement imperceptibles dans la vie courante où les vitesses en jeu sont toujours très inférieures à c ~300000 km/s.

En particulier, le facteur relativiste $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ de la transformation de Lorentz est un bon indicateur de l'amplitude des effets relativistes auxquels il faut s'attendre: toujours supérieur ou égal à 1, il est pratiquement égal à 1 dans toutes les expériences de la vie courante et croît très rapidement lorsque u se rapproche de la vitesse de la lumière.

Remarquons par ailleurs que si l'on se place dans un système d'unités où les temps sont mesurés en années et les distances en années-lumière (distance parcourue par la lumière en un an) alors c = 1 a.l/an peut être omis des transformations de Lorentz qui s'écrivent.

$$x'=\gamma(x-ut)$$
$$y'=y$$
$$z'=z$$
$$t'=\gamma(t-ux)$$

avec

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

Les effets relativistes de contraction des longueurs, dilatation du temps et disparition de la simultanéité sont des conséquences directes des transformations de Lorentz que nous allons maintenant expliquer brièvement. Ils ont donné lieu à de multiples confirmations observationnelles qui seront traitées en TD.

A. Contraction des longueurs

La longueur d'une règle AB mesurée dans un référentiel R' où elle est immobile est appelée sa longueur propre $L'=L_0$ donnée par $x_2'(B)-x_1'(A)$, les positions de ses deux extrémités pouvant être prises à deux instants t_1' et t_2' à priori quelconques. La longueur L de la même règle dans un référentiel R dans lequel la règle est en mouvement à la vitesse u suivant la direction de Ox parallèlement à la règle est par contre la différence $x_2(B)-x_1(A)$ entre les positions de ses extrémités au même instant $t_1=t_2$.
Pour établir la relation entre L et L', nous devons utiliser une des deux relations à notre disposition reliant Δx à $\Delta x'$: $\Delta x'=\gamma(\Delta x-u\Delta t)$ ou la relation inverse $\Delta x=\gamma(\Delta x'+u\Delta t')$. On est assuré que $\Delta x'=L'$ dans les deux relations. Si on pose $\Delta t = 0$ dans la première (extrémités prises au même instant $t_1=t_2$) on s'assure que Δx est bien la longueur L. Par contre, si on pose $\Delta t' = 0$ dans la seconde, rien ne garantit que Δt soit nul et que Δx ait quelque chose à voir avec la longueur L. Seule la première permet donc de trouver la relation entre L et L'=L0

$$L=L_0/\gamma$$

selon laquelle la longueur de la règle est perçue contractée par le facteur relativiste $\gamma > 1$.
Ces effets de contraction sont de purs effets de perspective (ils sont relatifs!) car si deux règles de même longueur se croisent, l'observateur R lié à la première mesure sa longueur propre mais voit la règle en mouvement contractée tandis que l'observateur R' lié à l'autre règle mesure pour cette dernière sa longueur propre et voit contractée la règle immobile dans R.
Notons également que seules les dimensions dans la direction du mouvement paraissent contractées. Les dimensions transverses sont invariantes: $\Delta y' = \Delta y$, $\Delta z' = \Delta z$. Les angles seront donc également affectés et nous en étudierons les conséquences.

B. Dilatation des temps

L'intervalle de temps $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ entre deux événements E_1 (x'_1,y'_1,z'_1,t'_1) et E_2 (x'_2,y'_2,z'_2,t'_2) donné par une même

horloge est appelé intervalle de temps propre $\Delta\tau$ dans le référentiel R' où cette horloge est au repos i.e dans lequel t'_1 et t'_2 sont pris au même point ($x'_1=x'_2, y'_1=y'_2, z'_1=z'_2$). L'intervalle temporel entre les deux événements dans le référentiel R où l'horloge (et R' qui lui est lié) se déplace à la vitesse u suivant la direction Ox est $\Delta t= t_2 - t_1$.
Pour obtenir la relation entre Δt et Δt', nous avons à priori le choix entre l'équation de transformation $\Delta t'=\gamma(\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x)$ et l'équation inverse $\Delta t=\gamma(\Delta t'+\frac{u}{c^2}\Delta x')$ mais seule la deuxième permet d'éliminer l'intervalle spatial nul dans R' (Δx'=0). Nous en déduisons immédiatement la relation

$$\Delta t=\gamma\Delta t'=\gamma\Delta\tau$$

selon laquelle le temps marqué par l'horloge en mouvement est dilaté par rapport à celui de l'horloge au repos. Ces effets de dilatation sont à nouveau de purs effets de perspective: lorsque deux horloges identiques se croisent, les observateurs liés à chacune des horloges voient leur propre horloge marquer le temps propre et l'horloge en mouvement ralentie. Cependant ces effets ne sont pas psychologiques, les instruments inanimés les enregistrent.

On peut comprendre de façon plus intuitive pourquoi l'effet de dilatation du temps est une conséquence de l'invariance de la vitesse de la lumière en considérant une horloge idéalisée constituée de deux miroirs face à face. L'aller et retour de la lumière entre eux est le phénomène périodique qui caractérise cette horloge. Si L est la distance entre les deux miroirs au repos dans R', la période T' de l'horloge y est donc de 2L/c. Par contre, dans R ou les deux miroirs se déplacent à la vitesse u parallèlement aux faces des miroirs la distance parcourue pendant le temps Δt de l'aller donc aussi du retour est $\sqrt{L^2+u^2(\Delta t)^2}$ mais aussi cΔt puisque la lumière se propage aussi dans R à la vitesse c.

Égalant les deux expressions on trouve le temps aller retour $T=2\Delta t=\frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\gamma T'$. Il y a donc dilatation du temps dans R pour que la lumière puisse y parcourir à la même vitesse c une plus grande distance que dans R'.

Que se passe t'il si R arrête l'horloge liée à R' pour comparer le temps de celle-ci avec le temps propre de son horloge restée au repos ? R et R' ne vont ils pas émettre des avis contradictoires chacun ayant perçu le temps de l'autre ralenti par rapport au sien ? Si tel était le cas et si cette situation expérimentale entrait dans le cadre de la Relativité Restreinte, il y aurait effectivement une contradiction manifestant l'incohérence de la Relativité Restreinte. Mais dans la situation précédemment envisagée des accélérations doivent être appliquées aux horloges, donc à R et R' pour les immobiliser l'une par rapport à l'autre, ce qui ressort de la théorie de la Relativité Générale. Si les deux horloges subissent des accélérations symétriques pour les amener au repos l'une par rapport à l'autre (mais toujours en mouvement par rapport à R et R') les horloges marqueront à l'arrivée le même temps pour R et R'. Si par contre seule l'horloge de R' subit les accélérations pour l'amener au repos dans R au voisinage de l'horloge de R alors la dissymétrie se traduit par le retard d'une horloge par rapport à l'autre (c'est le pseudo paradoxe des jumeaux), retard à propos duquel R et R' sont d'accord et qui est un pur effet de Relativité Générale donc sortant du cadre de ce cours.

C. Disparition de la simultanéité

Considérons deux événements, E2 en x_2 et E1 en x_1 simultanés dans R (les deux horloges initialement synchronisées mesurent indépendamment t1 et t2 et ces valeurs peuvent être enregistrées pour être ultérieurement comparées et le vérifier). Que se passe t'il dans R' en mouvement à vitesse uniforme **u** par rapport à R ? Comme Δt=0, $\Delta t'=\gamma(\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x)$ nous donne $\Delta t'=-\gamma(\frac{u}{c^2}\Delta x)$ et $\Delta x'=\gamma(\Delta x-u\Delta t)$ implique Δx = Δx'/ γ . Donc

$$\Delta t'=-(\frac{u}{c^2}\Delta x')$$

La relation inverse $\Delta t=\gamma(\Delta t'+\frac{u}{c^2}\Delta x')$ avec Δt=0 conduit au même résultat encore plus directement.
Conclusion: deux événement simultanés dans R ne le sont plus dans R'. La notion de simultanéité pour deux événements distants n'a plus un sens absolu indépendant du référentiel. Seule la simultanéité de deux événements au même point est valide dans tous les référentiels (Δx=0, Δt=0 ==> Δx'=0, Δt'=0).

On peut comprendre de façon plus intuitive pourquoi la disparition de la simultanéité est une conséquence de l'invariance de la vitesse de la lumière en considérant une source lumineuse au centre d'un wagon. Dans le référentiel R' lié au wagon la lumière en atteint les parois opposées simultanément : à $t_1' = t_2'$. Mais dans le référentiel R ou le wagon se déplace l'une des parois qui va au devant du signal lumineux sera nécessairement atteinte plus tôt que l'autre qui le fuit car dans R la vitesse de la lumière est toujours la même dans les deux directions opposées (et non pas c+u dans le sens du mouvement du Wagon et c-u dans le sens opposé). Donc $t_1 < t_2$: les événements ne sont plus simultanés dans R.

D. Intervalles du genre temps, espace, lumière

Dans ce qui suit nous admettrons qu'aucun signal ne peut se propager à une vitesse strictement supérieure à celle de la lumière ce dont nous donnerons une justification plus tard.

La disparition de la simultanéité que nous venons de constater en relativité restreinte semble pouvoir poser problème vis à vis de la causalité. Une formule telle que $\Delta t' = -(\frac{u}{c^2}\Delta x')$ signifie que $t'_2 < t'_1$ si R' se déplace par rapport à R avec la vitesse **u** dans le sens de x'_1 vers x'_2 ($u.\Delta x' > 0$) mais que pour un autre référentiel se déplaçant à la vitesse **u** opposée, l'ordre temporel des deux événements serait inversé. Si l'événement E_2 pouvait être la cause de l'événement E_1 dans un référentiel il semblerait donc que l'effet puisse précéder la cause dans un autre référentiel ! On sait que la possibilité de remonter le temps ou d'envoyer des signaux dans le passé conduit à des paradoxes qui semblent irrémédiables: qu'est ce qui pourrait vous empêcher en remontant dans le passé de vous opposer efficacement à la rencontre de votre grand père et de votre grand mère en contradiction avec votre propre existence ? Heureusement, le genre d'intervalle pour lequel nous avons établi la disparition de la simultanéité n'autorise aucun lien causal entre les événements E_1 et E_2. Dans R c'est évident: puisque les deux événements y étaient simultanés, il faudrait un signal de vitesse infinie entre eux pour que les événements puissent s'y influencer. Mais comme $\Delta t=0$ dans R, dans tout autre référentiel R', l'intervalle spatio-temporel étant conservé, on a

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - d'^2 = c^2\Delta t^2 - d^2 = -d^2 = \Delta s^2 < 0$$

donc $d' > c\Delta t'$, ce qui signifie que la distance d' est à nouveau trop grande pour que les événements puissent s'influencer à la vitesse maximale autorisée: c. De tels intervalles entre événements qui ne permettent aucune influence causale (ceci quel que soit le référentiel) sont appelés <u>intervalles du genre espace</u>. Ils satisfont $\Delta s^2 < 0$ et il existe toujours un référentiel où Δs est purement spatial : $\Delta t=0$ i.e. les événements sont simultanés.

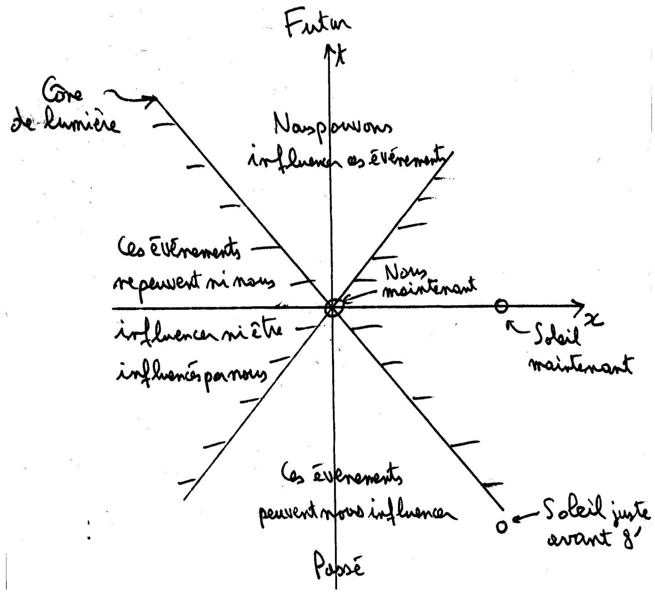
<u>Les intervalles du genre temps</u> sont au contraire ceux pour lesquels $\Delta s^2 > 0$. Il est toujours possible de trouver un référentiel R dans lequel ce type d'intervalle est purement temporel: d=0 i.e. par exemple 2 clics d'horloge successifs au même point. Évidemment ces événements peuvent s'influencer causalement puisque pour tout référentiel R':

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - d'^2 = c^2\Delta t^2 - d^2 = c^2\Delta t^2 = \Delta s^2 > 0$$

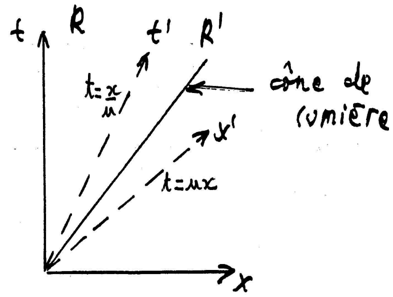
donc $d' < c\Delta t'$: la distance qui les sépare peut être parcourue à une vitesse inférieure à c dans tout référentiel.

Enfin, <u>les intervalles du genre lumière</u> vérifient $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - d^2 = 0 = c^2\Delta t'^2 - d'^2 = \Delta s'^2$ donc $d' = c\Delta t'$ dans n'importe quel référentiel et par conséquent peuvent s'influencer à une vitesse qui est celle de la lumière, bien sûr dans tous les référentiels, l'invariance de la vitesse de la lumière étant un des postulats de la théorie de la relativité restreinte.

Pour résumer tout cela, on a coutume de schématiser (on ne peut représenter que deux coordonnées: x en abscisse, t en ordonnée) par deux cônes dont le sommet commun est un certain événement E, tous les événements qui peuvent avoir influencé E ou pourront être influencés par E via un signal se propageant à la vitesse de la lumière. Tous les événements situés à l'intérieur du cône dit cône de lumière sont susceptibles de contact causal avec E (i.e. via des signaux de vitesse inférieure à c). Les événements à l'extérieur du cône ne peuvent ni influencer ni être influencés par E. Dans le système d'unités où c=1 le cône de lumière est à 45° des axes x et t.



Dans ce plan (x,t) les axes du référentiel R' toujours en mouvement à la vitesse u par rapport à R suivant Ox peuvent également être représentés. L'axe des t' est celui des événements de x'=0 donc d'après la transformation de Lorentz $0=x'=\gamma(x-ut)$ est une droite d'équation $t=x/u$. L'axe des x' est celui des événements de t'=0 (tous simultanés) donc d'après la transformation de Lorentz $0=t'=\gamma(t-ux)$ est une droite d'équation $t=ux$ (les événements ne sont plus simultanés).



Le cône de lumière est commun au repère d'axes x' et t' de R' et à celui d'axes x et t de R et les événements à l'intérieur (resp à l'extérieur) du cône de lumière de R sont donc également à l'intérieur (resp à l'extérieur) du cône de lumière de R' confirmant que le type (temps, espace ou lumière) d'intervalle entre E et un quelconque autre événement est bien indépendant du référentiel considéré.

III. Cinématique Relativiste

1. La transformation des vitesses

Il est certain que la règle additive et très intuitive de composition Galiléenne des vitesses de R à R': **v**=**v**'+**u** ne peut plus être vérifiée en relativité restreinte car dans le cas d'un signal lumineux devant se propager à la même vitesse dans tous les référentiels, elle est incompatible avec v=v'=c. La nouvelle loi de composition ou transformation des vitesses doit être déduite de la transformation de Lorentz. Écrite sous forme différentielle, nous avons:

$$dx' = \gamma(dx - u\,dt)$$
$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$
$$dt' = \gamma\left(dt - u\frac{dx}{c^2}\right)$$

d'où l'on tire

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - u\,dt)}{\gamma\left(dt - u\frac{dx}{c^2}\right)} = \frac{v_x - u}{1 - u\frac{v_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - u\frac{dx}{c^2}\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - u\frac{v_x}{c^2}\right)}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - u\frac{dx}{c^2}\right)} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - u\frac{v_x}{c^2}\right)}$$

la dernière égalité ayant été obtenue en divisant par dt les numérateurs et dénominateurs. Les transformations inverses s'obtiennent bien sûr en substituant -u (vitesse de R par rapport à R') à u (vitesse de R' par rapport à R) comme cela sera vérifié en TD.

Remarquons qu'une conséquence de la transformation de l'intervalle temporel est que non seulement la composante de la vitesse suivant la direction de **u** mais aussi les composantes transverses sont modifiées au passage de R à R'. Les lois de transformation redonnent les lois de composition des vitesses Galiléennes en bonne approximation lorsque u est petit devant c: $v'_x = v_x - u ; v'_y = v_y ; v'_z = v_z$.

Intéressons nous au cas d'un objet se déplaçant suivant la direction Ox à la moitié de la vitesse de la lumière dans R' (v'_x=c/2) lui même se déplaçant à la moitié de la vitesse de la lumière par rapport à R (u=c/2). Sa vitesse par rapport à R sera alors $v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + u\frac{v'_x}{c^2}} = \dfrac{4}{5}c$ et non pas c.

Intéressons nous au cas d'un signal lumineux suivant la direction Ox dans R' (v'_x=c) lui même se déplaçant dans le même sens à une vitesse proche de celle de la lumière par rapport à R (u=c - ε). En appliquant la même formule nous trouvons à nouveau que la vitesse du signal lumineux par rapport à R est encore c et non pas presque 2c. Si maintenant le référentiel R se propage dans la même direction que le signal lumineux, le signal lumineux n'est pas ralenti du point de vue de R mais a toujours en utilisant la même formule, la vitesse c. Toutes ces propriétés sont bien sûr cohérentes avec ce que nous savions déjà des transformations de Lorentz dont elles sont issues: la vitesse de la lumière est invariante par changement de référentiel et la vitesse d'un objet inférieure à c dans un référentiel le restera dans tout autre référentiel.

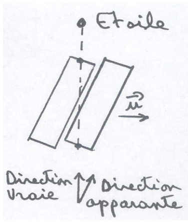
2. Conséquence: le phénomène d'aberration

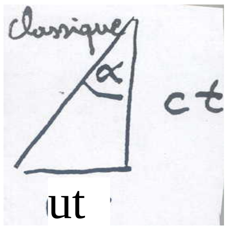
Considérons le rayon de lumière émis par une étoile lointaine et reçu dans un télescope sur terre. Dans R lié à l'étoile, la terre se déplace à la vitesse **u** dans l'espace perpendiculairement au rayon lumineux. On oriente le repère de R tel que **u** soit colinéaire à l'axe des x et que la vitesse **v** du rayon lumineux ait pour seule composante non nulle dans R: v_y=-c . Dans R' lié à la terre, les composantes de la vitesse du rayon lumineux sont transformées suivant les lois précédemment établies donc

$$v'_x = -u \, ; v'_y = \frac{-c}{\gamma} \, ; v'_z = 0$$

et le rayon lumineux tombe dans R' sous un angle α avec la verticale tel que tg(α) = $v'_x/v'_y = \gamma$ u/c donc sin(α) = u/c. C'est donc l'angle dont il faut pencher le télescope, angle qui varie au cours de l'année avec la direction de **u** au fur et à mesure que la terre parcours sa trajectoire autour du soleil. Au bout de six mois **u** s'est inversé et il faut incliner le télescope d'un angle opposé. Tous les astres paraissent donc décrire sur la voute céleste un petit cercle vu sous un angle 2α ~ 40" (calculé en prenant u~30 km/s) avec une période d'un an, phénomène connu sous le nom d'aberration.

Notons qu'en physique classique l'aberration existait aussi mais quelque peu différente puisqu'avec v'_x =-u, v'_y = -c, on obtenait tg(α) = v'_x/v'_y = u/c.





3. La transformation des accélérations

Poursuivant sur notre lancée, nous pouvons rechercher la loi de transformation des accélérations en écrivant:

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x - u}{1 - u\frac{v_x}{c^2}}\right)\frac{dt}{dt'}$$

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_y}{\gamma(1 - u\frac{v_x}{c^2})}\right)\frac{dt}{dt'}$$

$$a'_z = \frac{dv'_z}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_z}{\gamma(1 - u\frac{v_x}{c^2})}\right)\frac{dt}{dt'}$$

Le calcul de la dérivée est simple puisque u et γ sont constants. La transformation de Lorentz donne $dt'/dt = \gamma(1-uv_x/c^2)$ que l'on substitue pour obtenir finalement:

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3 (1 - u\frac{v_x}{c^2})^3}$$

$$a'_y = \frac{1}{\gamma^2 (1 - u\frac{v_x}{c^2})^2}\left(a_y + \frac{v_y u \frac{a_x}{c^2}}{(1 - u\frac{v_x}{c^2})}\right)$$

$$a'_z = \frac{1}{\gamma^2 (1 - u\frac{v_x}{c^2})^2}\left(a_z + \frac{v_z u \frac{a_x}{c^2}}{(1 - u\frac{v_x}{c^2})}\right)$$

Non seulement l'accélération n'est plus invariante sous changement de référentiel mais un mouvement uniformément accéléré dans R (a=g constante, v=gt) ne l'est plus dans R'.

Dans le cas de l'étude dans R du mouvement d'un mobile accéléré il est souvent utile de considérer à tout instant un référentiel R'=R_0 lié au mobile (le mobile y est au repos) et à vitesse uniforme **u**=**v,** vitesse du mobile par rapport à R.

Ce référentiel est parfois appelé référentiel comobile. Les transformations inverses de R'= R_0 à R s'obtiennent toujours par la substitution u ==> -u et se simplifient ici puisque **v**'=0.

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}$$
$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2}$$
$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2}$$

Il faut insister sur le fait que le référentiel comobile n'a de validité que sur un instantané (intervalle temporel dt infinitésimal) puisqu'il n'est pas accéléré avec le mobile. Pour suivre le mobile il faudrait donc considérer une succession de tels référentiels (voir en TD).

IV. Énergie et Quantité de Mouvement Relativistes

La RFD était invariante sous les transformations de Galilée mais l'adoption des transformations de Lorentz remet tout en question puisque en particulier nous venons de voir que l'accélération n'est plus invariante sous changement de référentiel. Dans l'objectif d'établir une nouvelle RFD invariante de Lorentz nous commençons par nous concentrer sur le terme d(**p**)/dt de $\frac{d}{dt}\vec{p}=\Sigma\vec{F}$. Pour établir la nouvelle expression de **p** le plus simple est de se placer dans une situation ou l'on peut se passer de connaitre l'expression des forces en présence. C'est précisément le cas qui se présente dans une collision entre particules: la physique de la collision proprement dite entre deux particules fait intervenir une force d'interaction et l'on sait que l'énergie totale c'est à dire la somme des énergies cinétiques et potentielles des particules est conservée au cours du processus. Mais lorsque l'on s'éloigne suffisamment du point d'interaction les énergies incidentes et finales deviennent purement cinétiques (les forces et énergies potentielles deviennent négligeables) et il ne reste plus qu'à appliquer la conservation de l'impulsion et de l'énergie cinétique totales entre les états initiaux et finaux où les particules sont isolées. Il est donc naturel de nous placer dans le même contexte pour rechercher quelles nouvelles expressions de l'énergie et de la quantité de mouvement d'une particule isolée sont imposées par la relativité restreinte sans avoir pour le moment à expliciter les forces en jeu.

1. Relation utile

On considère un intervalle spatial dx (resp dx') parcouru par une particule durant dt (resp dt') dans R (resp R'). Dans le référentiel au repos R_0 de la particule le temps propre correspondant est $d\tau$. La vitesse de la particule est donc v=dx/dt dans R et v'=dx'/dt' dans R'. Les formules de dilatation du temps de R_0 à R et R_0 à R' nous donnent donc: $dt=\gamma(v)\,d\tau$, $dt'=\gamma(v')\,d\tau$ et par conséquent $dt/dt'=\gamma(v)/\gamma(v')$. Mais u étant la vitesse de R' par rapport à R, la transformation de Lorentz nous donne également directement dt/dt' car:

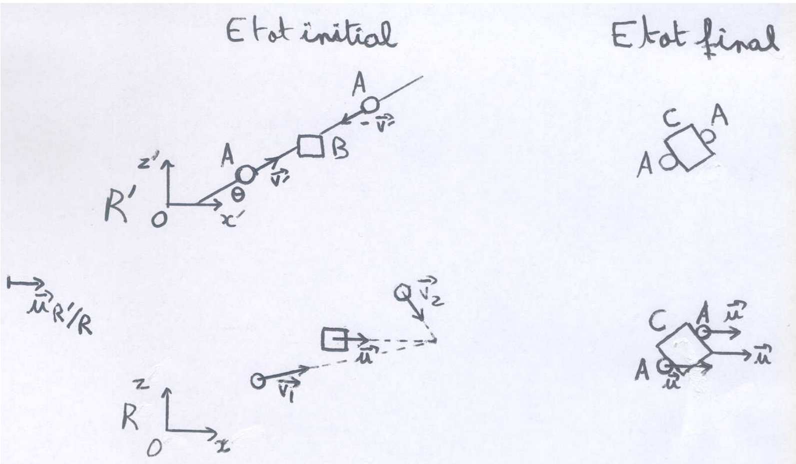
$$dt=\gamma(u)(dt'+\frac{u}{c^2}dx')\rightarrow\frac{dt}{dt'}=\gamma(u)(1+\frac{u}{c^2}v'_x)$$

Il suffit alors d'égaler les deux expressions de dt/dt' pour obtenir la relation utile liant les facteurs de Lorentz:

$$\gamma(v)=\gamma(v')\gamma(u)(1+\frac{u}{c^2}v'_x)$$

2. L'expression relativiste de l'énergie

En physique classique, l'énergie d'une particule isolée de masse m et vitesse v se réduit à son énergie cinétique ½ mv^2. En relativité restreinte, nous cherchons à établir la nouvelle expression de son énergie c'est à dire les fonctions f et g entrant dans la forme supposée générale E=g(m)f(v) (cette hypothèse simplificatrice selon laquelle les dépendances



en m et en v sont factorisables peut être démontrée). Analysons la collision de la figure suivante dans R':

Dans l'état initial deux particules identiques de type A (masse m_A) animées de vitesses opposées et de même module v' entrent en collision au point B où se trouve une troisième particule de type B (masse m_B) au repos. Les deux particules sont stoppées tandis que la masse de la troisième particule toujours stationnaire devient m_C. La conservation de l'énergie totale dans R' s'écrit donc:

$$\Delta E'_{tot}=0 \rightarrow 2\mathrm{g}(m_A)(f(0)-f(v'))=-(g(m_C)-g(m_B))(f(0))$$

La même collision peut être considérée dans un autre référentiel R où les vitesses initiales des particules A sont **v_1** et **v_2** et celle initiale de la particule B mais aussi de toutes les particules liées à R' dans l'état final est **u.** La conservation de l'énergie totale dans R s'écrit:

$$\Delta E_{tot}=0 \rightarrow g(m_A)(2\mathrm{f}(u)-f(v_1)-f(v_2))=-(g(m_C)-g(m_B))(f(u))$$

En divisant les équations de conservation obtenues dans R et R', les termes dépendants de la fonction g s'éliminent:

$$f(v_1)+f(v_2)=2\mathrm{f}(u)\frac{f(v')}{f(0)} \quad \text{(I)}$$

Le terme de gauche peut être réécrit $F(\gamma(v_1))+F(\gamma(v_2))$ avec, en utilisant notre expression utile établie plus haut:

$$\gamma(v_1)=\gamma(v')\gamma(u)(1+\frac{u}{c^2}v'\cos(\vartheta))$$
$$\gamma(v_2)=\gamma(v')\gamma(u)(1-\frac{u}{c^2}v'\cos(\vartheta))$$

et donc ce terme pourrait à priori dépendre de u, v' et $\cos(\theta)$ alors que le terme de droite ne dépend que de u et v'. Il faut donc imposer au terme de gauche de ne pas dépendre de $\cos(\theta)$ soit:

$$F'(\gamma(v_1))\frac{\partial\gamma(v_1)}{\partial\cos(\vartheta)}+F'(\gamma(v_2))\frac{\partial\gamma(v_2)}{\partial\cos(\vartheta)}=0$$

que l'on peut dériver une fois de plus

$$F''(\gamma(v_1))(\frac{\partial\gamma(v_1)}{\partial\cos(\vartheta)})^2+F''(\gamma(v_2))(\frac{\partial\gamma(v_2)}{\partial\cos(\vartheta)})^2=0 \rightarrow F''(\gamma(v_1))+F''(\gamma(v_2))=0$$

Car les dérivées de $\gamma(v_1)$ et $\gamma(v_1)$ par rapport à $\cos(\theta)$ sont opposées. Dans le cas ou $\cos(\theta)$ est nul, $\gamma(v_1)=\gamma(v_2)=\gamma(v')\gamma(u)$ peuvent encore prendre toutes les valeurs X possibles de 1 à l'infini et on a donc

2F "(X)=0 pour toutes ces valeurs de X donc F est du premier ordre dans son argument: $F(\gamma) = a\gamma(v)+b = f(v)$ que nous recherchions. En substituant cette expression dans toutes les fonctions f de l'égalité (I) il est immédiat de vérifier que l'identification des termes de gauche et de droite annule b. Considérerons par exemple le cas particulier ou non seulement $\cos(\theta)$ est nul, donc $v_1=v_2$ mais aussi v'=u. Alors, on peut poser $\gamma(v_1)=\gamma(v_2)=X^2$ et $\gamma(v')=\gamma(u)=X$ et identifier les termes du premier ordre en X de part et d'autre de l'égalité (I) ce qui impose la nullité du produit ab donc de b puisque $f(v) = a\gamma(v)+b$ doit dépendre de v.

L'énergie d'une particule en relativité restreinte est donc de la forme (en absorbant la constante a dans g(m)) $E=g(m)\gamma(v)$ qui pour les faibles vitesses v<<c donc $\gamma(v) \sim 1+1/2(v/c)^2$ conduit à $E \sim g(m) + (1/2)g(m)(v/c)^2$. Le deuxième terme, seul dépendant de v, doit correspondre à l'énergie cinétique classique donc $g(m) = mc^2$.

Finalement l'énergie totale de notre particule isolée est donc $E(v)=\gamma(v)mc^2$ qui n'est pas purement cinétique comme en physique classique mais possède une contribution $E(0)= mc^2$ même lorsque la vitesse v s'annule: l'énergie au repos ou énergie de masse. La partie cinétique Ec de E est $Ec = E – mc^2=(\gamma(v)-1)mc^2$. C'est un résultat particulièrement remarquable et aux conséquences pratiques considérables que toute masse au repos représente une fabuleuse quantité d'énergie: Pour m=1g, E= $9. 10^{13}$ Joules ! Encore faudrait il pouvoir l'extraire. Toutes les formes d'énergie interne peuvent contribuer à l'énergie au repos mc^2 qui est, somme toute, l'énergie interne totale. Dans le cas d'un atome par exemple, mc^2 (donc m) inclue des contributions d'origines électromagnétiques: les énergies cinétiques et potentielles des électrons et du noyau en interaction électromagnétique. Ces énergies peuvent être libérées dans les réactions chimiques mais ne représentent qu'une fraction de mc^2 (donc de m) total d'un atome de l'ordre de 10^{-8}, par exemple pour l'ionisation d'un atome d'hydrogène. Par conséquent, dans les processus chimiques la masse est conservée en très bonne approximation. Les énergies internes d'origine nucléaire peuvent être libérées dans les réactions entre noyaux d'atomes et représentent des fractions de masse pouvant approcher 10^{-2}. Nous verrons en effet en TD que dans les réactions nucléaires la masse totale des noyaux d'atomes dans l'état final est légèrement plus petite que dans l'état initial. La différence est alors libérée sous forme d'énergie exploitable: chaleur à convertir en énergie mécanique et électrique. Pour que l'énergie de masse soit presque totalement convertie en énergie exploitable il faudrait des annihilations entre matière et anti-matière cette dernière n'étant pas disponible dans notre environnement pour des raisons évidentes. En effet, dès que matière et antimatière se rencontrent elles s'annihilent en lumière. L'antimatière ne sera traitée qu'en théorie quantique des champs relativistes. Pour le moment il nous suffira d'admettre qu'elle est constituée d'anti-particules: antineutrons, antiprotons, anti-électrons ou positrons, dont toutes les charges sont inversées par rapport à celles des particules correspondantes, neutron, proton, électron.

Le fait que nous ayons pu aboutir à une définition de l'énergie montre que le cas de collision concret que nous avons envisagé est tout à fait réaliste: en relativité l'énergie sous forme cinétique. i.e. celle de nos deux particules incidentes de vitesse v' a pu se transformer en énergie au repos donc impliquant de la création de masse : celle d'une particule plus massive qui a été créée. La masse n'est plus conservée, c'est l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie de masse, qui l'est et nous l'illustrerons sur des exemples en TD même si les processus de création et d'annihilation de particules proprement dits dépassent le cadre de ce cours.

Au fur et à mesure que l'on accélère une particule, son énergie augmente d'abord avec le carré de sa vitesse pour v << c (comme l'énergie cinétique classique) mais lorsque celle-ci se rapproche de celle de la lumière, γ(v) tend vers l'infini: autrement dit il faudrait une énergie infinie pour porter une particule massive à la vitesse de la lumière ce qui explique que cette dernière constitue une limite infranchissable. Lorsque la vitesse de notre particule approche c il devient de plus en plus couteux en énergie de l'accélérer.

L'unité plus adaptée que le Joule aux échanges d'énergie entre particules élémentaires, atomes ou noyaux d'atomes est l'électron-Volt. Un eV est l'énergie d'un électron accéléré sous une ddp de 1 Volt soit $1.6\ 10^{-19}$ Joules. Notre nouvelle définition de l'énergie signifie que les unités sont liées également par $[E]=[m][v^2]$ et que par conséquent, plutôt qu'en kilogrammes, les masses peuvent être exprimées désormais en eV/c^2 ou tout simplement en eV dans le système d'unités tel que c=1 a.l/an (temps en années et distances en années-lumière). Ainsi la masse d'un électron est de 0.5 MeV ce qui correspond à 9.10^{-31} kg dans le système MKS.

3. L'expression relativiste de la quantité de mouvement

Dans une collision entre particules, l'énergie totale est conservée donc dans R', la somme des énergies individuelles initiales des particules égale celle des énergies finales:

$$\Sigma E'_i=\Sigma\gamma(v'_i)m_i c^2=\Sigma\gamma(v'_f)m_f c^2=\Sigma E'_f$$

Mais le lien entre un facteur γ (v') dans R' et γ (v) dans R est connu:

$$\gamma(v')=\gamma(v)\gamma(u)(1-\frac{u}{c^2}v_x)$$

d'après lequel en multipliant de part et d'autre de l'égalité par $m_i c^2$, l'énergie dans R', E'_i de la particule i et son énergie E_i dans R sont liées par

$$E'_i=E_i\gamma(u)(1-\frac{u}{c^2}v_{ix})$$

Comme l'est la somme des E', la somme des $E\gamma(u)(1-\frac{u}{c^2}v_x)$ doit donc aussi être conservée:

$$\gamma(u)\Sigma E_i-\frac{u\gamma(u)}{c^2}\Sigma E_i v_{ix}=\gamma(u)\Sigma E_f-\frac{u\gamma(u)}{c^2}\Sigma E_f v_{fx}$$

où les facteurs ne dépendant que de u et c, identiques pour toutes les particules ont été factorisés. L'énergie dans R étant séparément conservée $\Sigma E_i=\Sigma E_f$, on doit donc satisfaire $\Sigma\frac{E_i v_{ix}}{c^2}=\Sigma\frac{E_f v_{fx}}{c^2}$ soit $\Sigma\gamma(v_i)m_i v_{ix}=\Sigma\gamma(v_f)m_f v_{fx}$. Est donc conservée la somme des composantes suivant x de vecteurs $\vec{p}_i=\gamma(v_i)m_i\vec{v}_i$ dont on peut montrer également que les composantes suivant y et z sont conservées par le même raisonnement en choisissant R et R' tels que u soit dans la direction de y ou de z au lieu de x.

Dans le cas des faibles vitesses par rapport à c, γ(v)~1 et le vecteur est bien la quantité de mouvement classique $\vec{p}=m\vec{v}$ et c'est donc bien l'expression relativiste de la quantité de mouvement (ou impulsion) conservée que nous venons d'établir. Pour récapituler, l'énergie et l'impulsion relativistes conservées ont pour expressions:

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{(1-(\frac{v}{c})^2)}}\ ;\vec{p}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{(1-(\frac{v}{c})^2)}}$$

La nouvelle forme de l'impulsion est celle qui devra intervenir dans la nouvelle RFD relativiste. Puisque les unités de l'énergie [E] et de l'impulsion [p] sont liées par [p]=[E]/[v], cette dernière pourra être exprimée en unités [p]: eV/c.

La connaissance de l'énergie E et de la masse m d'une particule donne sa vitesse v via $\gamma(v)=E/m$. La connaissance de l'impulsion et de la masse permet d'accéder aussi à v via $\gamma(v)v=p/m$. Mais la connaissance de p et E donne v beaucoup plus directement: $v = c^2p/E$ soit $v = p/E$ dans le système d'unités tel que c=1a.l/an.

4. Transformations de l'énergie et de la quantité de mouvement

Pour toute particule parcourant un intervalle spatial (dx, dy, dz) pendant dt dans R il existe un référentiel de repos R_0 lié à celle-ci dans lequel l'intervalle temporel perçu est le temps propre $d\tau$ tel que $\gamma(v)=dt/d\tau$. Par conséquent nous pouvons écrire

$$p_x=\gamma(v)m\frac{dx}{dt}=m\frac{dx}{d\tau}$$
$$p_y=\gamma(v)m\frac{dy}{dt}=m\frac{dy}{d\tau}$$
$$p_z=\gamma(v)m\frac{dz}{dt}=m\frac{dz}{d\tau}$$
$$\frac{E}{c}=\gamma(v)mc=m\frac{cdt}{d\tau}$$

Comme m et $d\tau$ sont des invariants relativistes, nous voyons que le quadruplet (p_x, p_y, p_z, E/c) doit se transformer exactement comme le quadruplet bien connu (dx,dy,dz,cdt), i.e. sous transformations de Lorentz de R à R':

$$p'_x=\gamma(u)(p_x-\frac{u}{c}\frac{E}{c})$$
$$p'_y=p_y$$
$$p'_z=p_z$$
$$\frac{E'}{c}=\gamma(u)(\frac{E}{c}-\frac{u}{c}p_x)$$

De même que les transformations de Lorentz laissaient invariante la combinaison $c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ du quadruplet spatio-temporel elles doivent de façon équivalente laisser invariante la combinaison $(E/c)^2-px^2-py^2-pz^2 = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2$ du quadruplet énergie-impulsion. Dans le cas d'une unique particule en effet, $E^2/c^2 - \mathbf{p}^2$ n'est autre que $\gamma^2(v)(m^2c^2-m^2v^2)$ soit m^2c^2 qui est bien sûr indépendant du référentiel. Dans le cas d'une unique particule de masse m, énergie E, impulsion **p**, on retiendra donc la formule $E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4$. Ce qui était à priori moins trivial c'est que dans le cas d'un système de particules, ayant affaire à une somme d'impulsions contribuant à $\mathbf{p}_{Tot}$ et d'énergies contribuant à E_{Tot}, $E_{Tot}^2/c^2 - \mathbf{p}_{Tot}^2$ est aussi un invariant M^2c^2 dans lequel M appelée masse invariante n'est pas en général la somme des masses des particules en jeu. Puisque $\mathbf{p}_{Tot}$ et E_{Tot} sont conservées, n'importe quelle combinaison mathématique de $\mathbf{p}_{Tot}$ et E_{Tot} le serait notamment $E_{Tot}^2/c^2 - \mathbf{p}_{Tot}^2$. Mais $E_{Tot}^2/c^2 - \mathbf{p}_{Tot}^2$ étant la seule qui soit à la fois conservée <u>et</u> invariante, est particulièrement utile pour résoudre le plus simplement et rapidement possible les problèmes mettant en jeu des collisions entre particules comme nous le verrons en TD.

Récapitulons les acquis de ce chapitre: en relativité restreinte les expressions de l'énergie et de l'impulsion conservées ont été déterminées : $E=\gamma(v)mc^2$, $\mathbf{p}=\gamma(v)m\mathbf{v}$ permettant également connaissant m et E ou m et p ou encore E et p de remonter à la vitesse v. On sait aussi exporter cette énergie et composantes de l'impulsion d'un référentiel à un autre par les transformations de Lorentz. La combinaison $E^2/c^2 - \mathbf{p}^2$ prend la même valeur dans tous les référentiels et en TD il suffira donc de la calculer dans le référentiel le plus commode, souvent celui ou $\mathbf{p}=0$, dit référentiel du centre de masse.

V. La Lumière et l'Effet Doppler

1. Énergie et impulsion de la lumière

Pouvons nous appliquer les formules obtenues de l'énergie et de l'impulsion d'une particule massive au cas de la lumière? Selon la théorie de l'électromagnétisme un signal lumineux est une onde électromagnétique se propageant à la vitesse c et qui transporte de l'énergie et de l'impulsion. Il est clair, étant donné que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, qu'il n'existe pas de référentiel au repos donc aucune possibilité de partage entre énergie cinétique et énergie au repos pour cette forme d'énergie: on ne peut arrêter la lumière. D'autre part, la formule de définition de l'énergie d'une particule $E(v)=\gamma(v)mc^2$ ne peut avoir de sens (conduire à un résultat fini) pour v=c donc $\gamma(v)$ infini que si on admet que m=0 auquel cas la formule demeure de toutes façons indéterminée donc inexploitable. Il apparaît en tout cas que si l'énergie transportée par la lumière peut être quelconque elle n'est en rien déterminée par sa vitesse c. Pour la lumière, une chose que nous pouvons retenir du chapitre précédent est une relation entre p et E en posant m=0 dans la relation $E^2 = p^2c^2 + m^2 c^4$ ou v=c dans la relation $v=pc^2/E$. On obtient dans les deux cas E=pc ==> E=p pour c=1a.l/an.
La deuxième chose que nous pouvons retenir est que si les formules de transformation de l'énergie et de l'impulsion établies au chapitre précédent pour des particules sont valides pour la lumière, le quadruplet (E/c,px,py,pz) se transforme par Lorentz de R à R'.

2. Pulsation et vecteur d'onde de la lumière

On déduit des équations de Maxwell l'équation de propagation du champ électromagnétique valide dans n'importe quel référentiel. Par exemple, pour le champ électrique:

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

où $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ dont chaque composante, par exemple Ex (x,y,z,t), admet pour solution une onde plane:

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

d'amplitude E_{x0}, pulsation ω et vecteur d'onde **k** dont le module satisfait k=ω/c dans R.
Les lois de transformation du champ électromagnétique que nous établirons dans un prochain chapitre permettent d'exporter cette solution dans R' où elle s'écrit:

$$E'_x = E'_{x0} \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

solution que nous devons néanmoins achever d'exprimer dans le système de coordonnées de R' en remplaçant x, y, z, t par leurs expressions en fonction de x', y', z', t' données par les transformations de Lorentz donc

$$E'_x = E'_{x0} \cos(\omega \gamma (t' + ux'/c^2) - k_x \gamma (x' + ut') - k_y y' - k_z z')$$
$$\rightarrow E'_x = E'_{x0} \cos(\omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z')$$

onde plane d'amplitude E'_{x0}, pulsation ω' et vecteur d'onde **k'** dont les expressions en fonction de ω et **k** sont obtenues par identification:

$$k'_x = \gamma (k_x - \frac{u}{c} \frac{\omega}{c})$$
$$k'_y = k_y$$
$$k'_z = k_z$$
$$\frac{\omega'}{c} = \gamma (\frac{\omega}{c} - \frac{u}{c} k_x)$$

Nous avons donc mis en évidence un nouveau quadruplet (k_x, k_y, k_z, ω/c) qui se transforme exactement comme le quadruplet (p_x, p_y, p_z, E/c) ou encore (x,y,z,ct) de R à R': par des transformations de Lorentz. Ceci garantit que la combinaison $\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2$ doit une fois de plus être invariante de Lorentz. Elle était nulle dans R où nous avions k=ω/c et par conséquent l'est encore dans R' ou nous avons donc k'=ω'/c comme attendu pour une onde lumineuse devant encore se propager à la vitesse c dans R'.

La transformation de $(\mathbf{k},\omega)$ de R à R' signifie que la direction de propagation de la lumière (celle de **k**) sera en général modifiée comme nous l'avons déjà constaté en calculant l'aberration des étoiles mais aussi que la période temporelle $T = 2\pi/\omega$ et la longueur d'onde (ou période spatiale) $\lambda=2\pi/k$ seront également modifiées dans R' par rapport à leurs valeurs dans R: c'est l'effet Doppler relativiste sur lequel nous reviendrons en détails.

Existe t'il un lien entre $(p_x , p_y , p_z ,E/c)$ et $(k_x , k_y , k_z , \omega/c)$? On aura d'abord remarqué que les deux quadruplets se transforment de façon identique de R à R'. Le premier caractérise la lumière sous des aspects qui peuvent être ceux d'une particule de lumière, le photon i.e. son énergie et son impulsion. Le deuxième au contraire caractérise des propriétés ondulatoires de la lumière telles que la fréquence et la longueur d'onde. En physique classique, où l'énergie transportée par une onde n'est déterminée que par le carré de son amplitude et non pas par sa fréquence, il est difficile d'imaginer un lien entre E et ω ou entre **p** et **k** . C'est une autre révolution scientifique, d'une nature très différente de celle de la relativité qui a conduit à postuler un lien qui demeure très énigmatique entre E et ω et entre **p** et **k** au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle: celle de la Mécanique Quantique. En effet, bien que ses propriétés ondulatoires aient été confirmées les expériences montrent que les échanges d'énergie et d'impulsion de la lumière comme par exemple dans une expérience de collision entre particules se font par petits paquets ou quantas vérifiant:

$$E=\hbar\omega$$
$$\vec{p}=\hbar\vec{k}$$

où $\hbar=h/2\pi$ introduit une nouvelle constante de la physique, la constante de Planck $h = 6.626\ 10^{-34}$ Joule seconde dont l' extrême petitesse explique que les effets quantiques sont en général imperceptibles à l'échelle macroscopique.

3. L'effet Doppler relativiste

Considérons une source lumineuse émettant à la période $T=T_0$ (fréquence $f_0=1/T_0$) dans le référentiel qui lui est propre. La source se déplace en direction d'un détecteur à la vitesse u dans le référentiel lié à ce dernier. A quelle période T_D (fréquence $f_D=1/T_D$) le détecteur reçoit il l'onde lumineuse? Traitons d'abord le problème dans le cadre de la physique classique. La source émet une crête d'onde tous les T_0 :durant ce temps la crête précédente a parcouru une distance c T_0 et la source une distance u T_0 dans le même sens. La distance séparant deux crêtes est donc de (c-u) T_0 ; Lorsque le détecteur reçoit une crête il doit donc attendre T_D= ((c-u) T_0)/c pour recevoir la suivante. Donc la période reçue $T_D=(1-u/c)\ T_0$ est plus petite que la période émise T_0 et la fréquence est au contraire augmentée (décalage vers le bleu) dans un rapport inverse. C'est l'effet Doppler classique qui aurait été au contraire une dilatation de la période et diminution de la fréquence (décalage vers le rouge) si la source s'était éloignée du détecteur (u ==> -u).

Dans le cadre relativiste, le raisonnement précédent tient toujours à ceci près que pour le détecteur, la source est en mouvement et donc émet avec la période dilatée $\gamma(u)T_0$ au lieu de T_0 . La période reçue sera donc $T'=(1-u/c)\ \gamma(u)T_0$ soit en explicitant $\gamma(u)$:

$$T'=T_0\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}$$

La modification par rapport à la formule classique devient importante pour des vitesses non négligeables devant c.

Considérons cette fois le cas classique où c'est la source qui est au repos et le détecteur qui s'en rapproche à la vitesse u. Cette fois les crêtes émises sont espacées de c T_0 mais le détecteur balaie (c+u) T_0 /(c T_0) distances inter-crêtes pendant le temps T_0 donc une seule distance inter-crêtes pendant le temps T_D = c T_0/(c+u)=T_0/(1+u/c). Le résultat est encore dilaté mais différemment de ce que donnait le calcul classique dans le cas où la source était en mouvement et le détecteur au repos : $T_0/(1+u/c) \neq T_0\ (1-u/c)$.

On peut aussi suivre le raisonnement précédent dans le cadre relativiste, à ceci près que dire que c'est le détecteur qui se déplace c'est se placer du point de vue de la source donc le temps calculé est celui entre deux réceptions de crêtes par le détecteur du point de vue de la source. Il est donc dilaté d'un facteur $\gamma(u)$ par rapport au T' que nous cherchons donc $T'= T_D /\gamma(u) =T_0/((1+u/c)\gamma(u))$ et nous retrouvons :

$$T'=T_0\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}$$

L'effet Doppler relativiste ne distingue bien sûr pas la situation où la source est en mouvement et le détecteur au repos de celle où la source est au repos et le détecteur en mouvement car en l'absence d'éther seul le mouvement relatif de la source et du détecteur importe. Au contraire notre calcul de l'effet Doppler classique pouvait distinguer les deux situations: dans la première, la source était en mouvement et le détecteur au repos par rapport à l'éther (où la vitesse de la lumière est c) tandis que dans la seconde c'est le détecteur qui était en mouvement et la source au repos par rapport à cet éther.

On peut aussi utiliser le quadruplet (k_x , k_y , k_z , ω/c) et sa transformation de Lorentz de R lié à la source à R' lié au détecteur pour établir l'effet Doppler relativiste. Puisque la lumière ne se propage que suivant la direction Ox, on a k_x=k=ω/c. Donc (la vitesse de R' par rapport à R est ici -u avec u positif puisque le détecteur se rapproche de la source)

$$\omega' = \gamma(\omega + k_x u) = \gamma\,\omega(1 + u/c) = \omega\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

et par conséquent la relation inverse entre les périodes est obtenue en accord avec celle précédemment établie.

VI. Covariantiser les Équations de la Physique

1. Rappel: rotations, vecteurs et scalaires

Toutes les équations de la physique classique sont invariantes sous rotations: ceci garantit que si on effectue une expérience et la même expérience tournée d'un angle quelconque, toutes choses étant égales par ailleurs, les deux doivent conduire au même résultat ce qui manifeste l'absence de direction privilégiée ou isotropie. Pourtant, la plupart des objets figurant dans les équations, comme les champs, les coordonnées, etc sont sensibles aux rotations mais les équations ne font intervenir que des combinaisons mathématiques de ces objets qui se transforment de la même façon de part et d'autre des égalités. Par exemple on est sûr que la RFD

$$m\vec{a}=\sum \vec{F}$$

est invariante sous rotations car il s'agit d'une égalité entre objets appelés vecteurs qui se transforment sous rotation de la même manière. En réalité, ce sont ici trois équations correspondant aux composantes suivant x, y et z qui sont séparément vérifiées et garderont la même forme dans tous les référentiels obtenus par rotation. En écrivant des équations vectorielles, on garantit donc au premier coup d'œil l'invariance sous rotation mais on dispose de plus d'un moyen compact de rassembler plusieurs équations (ici 3) en une seule.
Des équations qui ne vérifieraient pas l'invariance sous rotation et ne seraient donc valides que dans un référentiel particulier seraient par exemple:

$$a_x=F_y$$
$$a_x=x^2+y^2+z^2$$

Si la première entre les composantes en x et en y de deux vecteurs est vraie dans un certain référentiel il suffit de faire une rotation autour de l'axe x par exemple pour transformer le terme de droite tout en laissant invariant celui de gauche ce qui fait perdre sa validité à l'équation dans le référentiel tourné. Idem dans la deuxième, puisque la combinaison $x^2+y^2+z^2$ est une distance invariante sous rotation, tandis que le terme de gauche n'est en général pas invariant.
Une grandeur invariante sous rotation telle que $x^2+y^2+z^2$ est appelée un scalaire sous rotation. Nous avons appris que l'on peut construire de tels scalaires en effectuant des produits scalaires entre vecteurs : $\mathbf{v}.\mathbf{w}=v_xw_x+v_yw_y+v_zw_z$. Les constantes de la physique et certaines grandeurs comme la masse ou la charge d'une particule sont considérées aussi comme des scalaires sous rotation en physique classique ce qui permet de les introduire dans les équations de la physique sans se poser de question. Insistons: n'importe quelle égalité entre deux scalaires ou entre deux vecteurs est manifestement invariante sous rotations.

2. Quadrivecteurs et scalaires de Lorentz

La théorie de la relativité restreinte postule que toutes les équations de la physique désormais ne doivent plus seulement être invariantes sous des rotations qui ne mélangent que les coordonnées spatiales (x,y,z) mais aussi sous des changements de vitesse (de R à R') qui mélangent les coordonnées spatiales et temporelles (x, y, z, ct) comme nous le voyons dans les transformations de Lorentz, ceci afin de satisfaire le principe de relativité qu'on pourrait considérer comme un principe d'isotropie généralisé à l'espace-temps. Cette invariance ne pourra être satisfaite que si nos équations expriment des égalités entre objets qui se transforment de la même façon sous changement de référentiel en mouvement relatif à vitesse uniforme. Dans l'objectif d'aboutir à de telles équations:

La première étape est bien sûr de comprendre comment se transforment toutes les grandeurs importantes de la physique sous ces changements de vitesse: nous l'avons fait pour les coordonnées, énergie, impulsion, vecteur d'onde, pulsation, vitesse, masse, accélération...et cela reste à faire pour les grandeurs figurant dans les équations de Maxwell: potentiels, champs électriques et magnétiques, densité de courant et de charge...

La deuxième étape est de regrouper un certain nombre d'entre elles dans des objets à plusieurs composantes, comme lorsque l'on réunit x,y,z en un vecteur **r,** qui se transforment d'une façon bien précise. C'est ce que nous avons fait en identifiant plusieurs quadruplets qui tous se transforment par Lorentz sous changement de vitesse de même que les vecteurs se transforment tous de la même façon sous rotation: on appelle naturellement ces quadruplets des quadrivecteurs. Nous avons déjà rencontré le quadrivecteur espace-temps (x, y, z, ct), le quadrivecteur énergie-impulsion (p_x , p_y , p_z , E/c), le quadrivecteur vecteur d'onde-pulsation (k_x , k_y , k_z , ω/c). Certaines composantes comme celles de la vitesse par exemple ne se transformaient pas par Lorentz mais nous avons écrit

$$p_x=\gamma(v)m\frac{dx}{dt}=m\frac{dx}{d\tau}$$
$$p_y=\gamma(v)m\frac{dy}{dt}=m\frac{dy}{d\tau}$$
$$p_z=\gamma(v)m\frac{dz}{dt}=m\frac{dz}{d\tau}$$
$$\frac{E}{c}=\gamma(v)mc=m\frac{cdt}{d\tau}$$

qui montre que le quadrivecteur énergie impulsion est proportionnel au quadruplet $(\gamma(v)\mathbf{v},\gamma(v)c)$ = $(dx/d\tau, dy/d\tau, dz/d\tau, cdt/d\tau)$ ce qui montre que ce dernier est aussi un quadrivecteur dans lequel on a pu caser les composantes de la vitesse. Un quadrivecteur sera désigné sous une notation compacte, par exemple P^μ dont l'indice grec varie entre 0 et 3 pour le quadrivecteur énergie-impulsion dont les composantes sont $P^0 = E/c$, $P^1 = p_x$, $P^2 = p_y$, $P^3 = p_z$. De manière équivalente k^μ, x^μ et v^μ désigneront respectivement les quadrivecteurs vecteur d'onde-pulsation, espace-temps et vitesse.

Il nous faut également identifier les scalaires sous transformations de Lorentz : ce sont par exemple des constantes de la physique comme c mais nous avons aussi remarqué que pour tout quadrivecteur Q^μ la combinaison $(Q^0)^2-(Q^1)^2-(Q^2)^2-(Q^3)^2$ est un scalaire. Nous l'appelons la norme du quadrivecteur: Q^2. Dans le cas du quadrivecteur espace-temps (dx,dy,dz,cdt), la norme est le scalaire intervalle spatiotemporel ds^2. Dans le cas du quadrivecteur énergie-impulsion, la norme P^2 est le scalaire $M^2 c^2$ où M était appelée la masse invariante qui dans le cas d'une unique particule est tout simplement sa masse: la masse est donc un scalaire. Dans le cas du quadrivecteur vitesse $v^\mu = (\gamma(v)\mathbf{v},\gamma(v)c)$, la norme est simplement le scalaire c^2. Il est facile de montrer que toute combinaison linéaire de quadrivecteurs (à coefficients scalaires) est également un quadrivecteur de part la linéarité des transformations de Lorentz.

La troisième étape sera de réécrire toutes les équations sous forme d'égalités entre nos scalaires ou entre nos quadrivecteurs, ou tous autres objets (tenseurs) qui se transformeront de la même façon de part et d'autre des égalités. Si nous réussissons à le faire pour l'électromagnétisme, cela confirmera l'invariance de cette théorie sous les changements de vitesse laissant invariant la vitesse de la lumière. En écrivant une égalité entre quadrivecteurs qui dans le domaine des faibles vitesses redonnera la RFD nous verrons comment celle-ci est en général modifiée par la relativité. On disposera finalement de notations très compactes permettant de réunir de nombreuses équations en une seule et simultanément d'assurer qu'elles sont relativistes.

3. Covecteurs et produit scalaire

De même que des produits scalaires entre vecteurs aboutissent toujours à des scalaires sous rotations un produit scalaire entre quadrivecteurs, à définir soigneusement, devra résulter en un scalaire sous transformations de Lorentz. Dans cet objectif, à tout quadrivecteur $Q^\mu = (Q^0, Q^1, Q^2, Q^3)$ nous associons un certain $Q_\mu = (Q_0 = Q^0, Q_1 = -Q^1, Q_2 = -Q^2, Q_3 = -Q^3)$ appelé son covecteur. Q^μ se transforme par Lorentz ce que l'on peut noter matriciellement

$$\begin{bmatrix} Q'^0 \\ Q'^1 \\ Q'^2 \\ Q'^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q^0 \\ Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \end{bmatrix}$$

soit $Q'^\mu = L^\mu{}_0 Q^0 + L^\mu{}_1 Q^1 + L^\mu{}_2 Q^2 + L^\mu{}_3 Q^3$ avec $L^\mu{}_\tau$ la matrice de Lorentz. L'indice supérieur (resp inférieur) est un indice de ligne (resp colonne). En notation compacte on écrira: $Q'^\mu = L^\mu{}_\tau Q^\tau$ en appliquant la convention de sommation sur les indices répétés.

Q_μ qui ne se transforme pas par Lorentz n'est pas un quadrivecteur mais il se transforme par Lorentz inverse (obtenue en substituant -u à u) comme il est immédiat de le vérifier en effectuant les substitutions ($Q_0 = Q^0$, $Q_1 = -Q^1$, $Q_2 = -Q^2$, $Q_3 = -Q^3$) dans les transformations de Lorentz vérifiées par (Q^0, Q^1, Q^2, Q^3). Il est dit covariant par opposition au véritable quadrivecteur Q^μ qui lui est dit contravariant: c'est un covecteur dont la transformation sous forme matricielle s'écrit:

$$\begin{bmatrix} Q'_0 & Q'_1 & Q'_2 & Q'_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

soit $Q'_\mu = L^{-1}{}_\mu{}^0 Q_0 + L^{-1}{}_\mu{}^1 Q_1 + L^{-1}{}_\mu{}^2 Q_2 + L^{-1}{}_\mu{}^3 Q_3$ soit en écriture compacte $Q'_\mu = L^{-1}{}_\mu{}^\tau Q_\tau$ avec $L^{-1}{}_\mu{}^\tau$ représenté par la matrice de Lorentz inverse puisque $L^\mu{}_\tau\ L^{-1}{}_\nu{}^\tau = \delta^\mu{}_\nu$ le symbole de Kronecker représenté matriciellement par la matrice identité (ses éléments valent 1 pour $\mu = \nu$, 0 sinon).

Pour n'importe quels P^μ et Q^μ le nombre $Q_\mu P^\mu = Q_0P^0 + Q_1P^1 + Q_2P^2 + Q_3P^3 = Q^\mu P_\mu = Q^0P_0 + Q^1P_1 + Q^2P_2 + Q^3P_3 = P^0Q^0 - P^1Q^1 - P^2Q^2 - P^3Q^3$ est un scalaire de Lorentz. En effet : $Q'_\mu P'^\mu = L^{-1}{}^\sigma{}_\mu\ L^\mu{}_\tau\ Q_\sigma\ P^\tau = \delta^\sigma{}_\tau\ Q_\sigma\ P^\tau = Q_\tau\ P^\tau$

Il est par définition le produit scalaire de P^μ et Q^μ noté PQ. En particulier, le produit scalaire d'un quadrivecteur Q^μ par lui même n'est rien d'autre que la norme $Q^2 = (Q^0)^2 - (Q^1)^2 - (Q^2)^2 - (Q^3)^2$ que nous savions déjà être un scalaire. Le produit scalaire de quadrivecteurs est bel et bien l'analogue du produit scalaire entre simple tri-vecteurs: de même que ceux là permettaient de construire des scalaires sous rotations tel que $xp_x + yp_y + zp_z$ de même ceux-ci nous donnent la possibilité de construire des scalaires sous transformations de Lorentz tels que $x_\mu k^\mu = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z$, la phase d'une onde électromagnétique que nous avions déjà rencontrée.

4. Tenseurs

A partir de quadrivecteurs tels que Q^μ et P^μ ou de covecteurs tels que P_μ et Q_μ ont peut aussi construire des objets à plusieurs indices appelés tenseurs comme par exemple $Q^\mu\ P^\nu$ ou $P^\mu\ P^\nu$ ou encore $Q^\mu\ P_\nu$ ou même $P^\mu\ P^\nu\ Q_\rho Q_\sigma\ Q_\nu$.
$Q^\mu\ P^\nu$ par exemple est un objet à 16 composantes:

$$Q^\mu P^\nu = \begin{bmatrix} Q^0 P^0 & Q^0 P^1 & Q^0 P^2 & Q^0 P^3 \\ Q^1 P^0 & Q^1 P^1 & Q^1 P^2 & Q^1 P^3 \\ Q^2 P^0 & Q^2 P^1 & Q^2 P^2 & Q^2 P^3 \\ Q^3 P^0 & Q^3 P^1 & Q^3 P^2 & Q^3 P^3 \end{bmatrix}$$

L'ordre d'un tenseur est le nombre d'indices non répétés qui y figurent, car lorsque on trouve deux fois le même indice il s'agit en fait d'une somme sur toutes les valeurs possible de cet indice qui par conséquent réduit de 2 l'ordre du tenseur. On parle de contraction des indices. C'est ainsi que $Q_\mu P^\mu$ n'était pas un tenseur d'ordre 2 (objet à 4x4=16 composantes) mais un tenseur d'ordre 2-2=0 i.e. un simple nombre que nous avons appelé scalaire. Les tenseurs introduits pour exemple plus haut sont ainsi d'ordre 2 pour les trois premiers et d'ordre 5-2=3 pour le dernier. Un simple quadrivecteur ou covecteur apparaît désormais comme un tenseur d'ordre 1 et un scalaire comme un tenseur d'ordre 0.
On peut aussi directement introduire un tenseur d'ordre n quelconque sans spécifier une construction en terme de quadrivecteurs ou covecteurs par exemple le tenseur d'ordre 5: $T^{\tau\sigma}{}_{\mu\nu\rho}$. En fait l'utilité des tenseurs réside uniquement dans le fait qu'il s'agit d'objets multicomposantes dont on connait le règles de transformation par changement de référentiel à vitesse uniforme. Nous connaissons déjà celles de transformation de tenseurs d'ordre 1, quadrivecteurs et covecteurs qui se généralisent immédiatement. Par exemple pour notre tenseur d'ordre 5:

$$T'^{\tau\sigma}{}_{\mu\nu\rho} = L^\tau{}_\omega\ L^\sigma{}_\kappa\ L^{-1}{}_\mu{}^\lambda\ L^{-1}{}_\nu{}^\delta\ L^{-1}{}_\rho{}^\chi\ T^{\omega\kappa}{}_{\lambda\delta\chi}$$

transformation qui serait lourde (pour chaque indice une matrice de Lorentz agit sur celui-ci) dans une écriture développée étant données toutes les sommations impliquées par les indices répétés mais heureusement nous n'aurons presque jamais à la faire. En effet, ce qui nous importe c'est d'avoir introduit des objets aux règles de transformation bien définies, les tenseurs, et de savoir que toute égalité entre tenseurs du même type telle que par exemple $T^{\tau\sigma}{}_{\mu\nu\rho} = U^{\tau\sigma}{}_{\mu\nu\rho}$ est une équation acceptable pour un physicien puisque les objets de part et d'autre de l'égalité se transformant de la même manière sous changement de référentiel de R à R', nous aurons encore $T'^{\tau\sigma}{}_{\mu\nu\rho} = U'^{\tau\sigma}{}_{\mu\nu\rho}$ dans n'importe quel autre R' se déplaçant à vitesse uniforme par rapport à R.

Notre programme de travail en 3 étapes peut donc se poursuivre: 1 et 2: comprendre comment se transforment toutes les grandeurs physiques et les regrouper dans des tenseurs (scalaires, quadrivecteurs, covecteurs ou tenseurs d'ordre plus élevés) puis 3: réécrire les équations de la physique sous forme d'égalités tensorielles donc manifestement invariantes de Lorentz; on dit aussi covariantes. Si certaines équations de la physique classique ne s'avèrent pas covariantes il faudra les modifier de telle manière qu'elles le deviennent et que les nouvelles équations redonnent dans l'approximation des faibles vitesses celles de la physique classique qui avaient fait leur preuve dans ce domaine.

VII. L’Électrodynamique Relativiste

Si, comme nous nous en doutons, les équations de Maxwell sont invariantes sous changement de référentiel inertiel, nous ne sommes pas censés apprendre grand chose de ce qui ne sera qu'une ré-écriture dans une forme rendant cette invariance manifeste. Pourtant, en apprenant à transformer les champs électromagnétiques, potentiels et sources d'un référentiel à un autre, nous gagnerons considérablement en intuition des phénomènes électromagnétiques et nous disposerons d'une nouvelle méthode nous permettant de résoudre des problèmes difficiles dans un référentiel où les calculs se simplifient avant d'exporter les résultats dans le référentiel du laboratoire où ils (les mesures expérimentales) sont enregistrés.
NB (source fréquente de confusion): Selon le principe de relativité, deux observateurs liés à deux référentiels R et R' en mouvement relatif à vitesse uniforme effectuant chacun de son coté la même expérience doivent obtenir les mêmes résultats: par exemple une expérience immobile sur la table du labo de R, et la même immobile sur la table du labo de R'. Cela ne signifie pas du tout que la même et unique expérience donne les mêmes résultats considérée des points de vue de R et R' car si elle est immobile dans R elle ne l'est généralement plus dans R' et ce n'est pas la même expérience pour R': par exemple des effets de dilatation du temps et de contraction des distances distinguent les deux points de vue. Cependant, les deux points de vue ne doivent pas être contradictoires (cf le pseudo-paradoxe de la règle et du trou traité en TD). Dans ce chapitre nous nous intéresserons entre autre, à la manière dont deux observateurs perçoivent une même expérience électromagnétique.

1. Le quadrivecteur densité de charge et de courant

L'expérience montre que la charge électrique d'une particule doit être un invariant relativiste. Dans le cas contraire, la charge d'un conducteur dépendrait de la vitesse moyenne d'agitation de ses particules chargées donc de sa température, ce qui n'est pas constaté. Q est donc un scalaire de Lorentz: Q'=Q.

La transformation de R_0, où la charge est au repos, à R de la densité de charge définie comme la charge par unité de volume $\rho = Q/\Delta V$ sera donc entièrement déterminée par celle de l'élément de volume $\Delta V= \Delta x\Delta y\Delta z$. Seule la longueur Δx prise dans le sens de **u,** vitesse de R/R_0, est affectée: puisque le volume considéré est au repos dans R_0, Δx donc ΔV est contracté dans R : $\Delta x = \Delta x_0/\gamma$ ==> $\Delta V = \Delta V_0/\gamma$ ==> $\rho = \gamma\ \rho_0$.

Nous pouvons aussi savoir comment se transforme la densité de courant définie par $\vec{j}=\rho\vec{v}$, puisque nous avons déjà établi les lois de transformation de la vitesse mais on peut économiser quelques calculs en remarquant que $(\gamma(v)\mathbf{v},\gamma(v)c)$ est un quadrivecteur qui le restera en multipliant toutes ces composantes par un même scalaire ρ_0. Le quadrivecteur résultant est $(\rho_0\,\gamma(v)\mathbf{v},\rho_0\,\gamma(v)c) = (\rho\,\mathbf{v},\rho c) = (\mathbf{j},\rho c)$. On sait donc que les 3 composantes de $\vec{j}=\rho\vec{v}$ se transforment comme les trois composantes spatiales de ce quadrivecteur appelé densité de charge et de courant désigné par J^μ dans lequel nous avons réussi à caser **j** et ρ, les termes source des équations de Maxwell. On peut écrire sa transformation de Lorentz de R à R' pour le plaisir:

$$j'_x=\gamma(j_x-\frac{u}{c}\rho c)$$
$$j'_y=j_y$$
$$j'_z=j_z$$
$$\rho' c=\gamma(\rho c-\frac{u}{c}j_x)$$

Nous savons que l'électricité et le magnétisme sont deux phénomènes complètement unifiés: il suffit de considérer une charge au repos dans R où elle ne crée qu'un champ électrique alors que dans un autre référentiel R' ayant une vitesse non nulle elle crée également un champ magnétique. Mais les lois de transformation précédentes nous permettent d'aller plus loin. Considérons un conducteur au repos dans R: sa densité de charge totale y est nulle puisque les charges négatives équilibrent exactement les charges positives: $\rho = \rho_+ +\rho_- =0$ et le conducteur ne crée donc pas de champ électrique dans R alors que seules les charges négatives étant mobiles, sa densité de courant est non nulle et il crée donc un champ magnétique.
La situation change dans R' en mouvement à la vitesse u par rapport à R dans la même direction que les charges négatives, de telle façon que celles-ci soient au repos dans R'. Dans R' en effet, la densité de charge positive est dilatée par rapport à ce qu'elle était dans R où elles étaient au repos $\rho'_+ = \gamma\ \rho_+$. Pour les charges négatives c'est le contraire: c'est dans R que leur densité était dilatée par rapport à celle de R' où elles se trouvent au repos donc $\rho'_- = \rho_-/\gamma$. Il en résulte que la densité totale de charge dans R' devient $\rho'_+ + \rho'_- = \rho_-/\gamma + \gamma\ \rho_+ = \rho_+\ (\gamma - 1/\gamma)$ non nulle. Le fil n'est plus neutre dans R' où il va donc créer un champ électrique qui n'existait pas dans R. Cela ne signifie pas qu'au bout du compte R et R' n'observeront pas le même comportement d'une particule test plongée dans le champ électromagnétique du conducteur (cette question sera abordée plus loin): en effet, il nous faut encore calculer les champs électriques **et** magnétiques dans chaque référentiel puis les forces qui en résultent en tenant compte du fait que la particule test n'a pas

la même vitesse dans R et R' ce qui affecte aussi la force de Lorentz subie. Mais en tout cas la division et les calculs **intermédiaires** en terme de champ électrique et magnétique dépendent du système dans lequel on décrit les phénomènes.

2. Le quadrivecteur gradient

Considérons dans R la variation δf d'un quelconque champ f(x,y,z,t) sous variation δt de t à x,y,z fixés:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial t}\delta t$$

D'après les transformations de Lorentz liant les coordonnées dans R aux coordonnées dans R', la variation δt se traduit par des variations $\delta x' = -u\gamma\ \delta t$ et $\delta t' = \gamma\ \delta t$ et la variation δf peut donc aussi s'écrire:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial f}{\partial t'}\delta t' = \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial t'} - u\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\delta t$$

Nous pouvons alors identifier nos deux expressions de δf pour en tirer :

$$\frac{\partial}{c\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial}{c\partial t'} - \frac{u}{c}\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

La même méthode permet également de trouver:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{c}\frac{\partial}{c\partial t'}\right);\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'};\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

La comparaison avec les lois de transformation de $x^\mu=(x,y,z,ct)$:

$$x = \gamma\left(x' + \frac{u}{c}ct'\right)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$ct = \gamma\left(ct' + \frac{u}{c}x'\right)$$

revelle que le quadruplet $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{c\partial t}\right)$ se transforme comme le covecteur x_μ. En effet, les transformations sont les mêmes que celles de x^μ mais avec -u au lieu de u. Nous l'appelons gradient quadri-dimensionnel et désignons par ∇_μ . Par conséquent le contravariant $\left(\frac{-\partial}{\partial x}, \frac{-\partial}{\partial y}, \frac{-\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{c\partial t}\right)$ est un quadrivecteur que nous désignons par ∇^μ .

Il apparaît alors que l'équation scalaire $\nabla_\mu\ J^\mu = 0$ n'est rien d'autre que l'équation de conservation de la charge électrique:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla}.\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Celle-ci est donc invariante de Lorentz.

On construit également l'opérateur scalaire $\nabla_\mu \nabla^\mu$ = $\nabla_\mu \nabla^\mu = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ qui n'est autre que le D'Alembertien $\Box = \partial^2/(c^2\partial t^2) - \Delta$

3. Équations du potentiel électromagnétique

L'étude des équations de Maxwell nous a appris que les champs **E** et **B** pouvaient être calculés à partir de deux potentiels: le potentiel ϕ (scalaire sous rotation) et le potentiel vecteur **A.** Si on impose la condition de Jauge de Lorenz

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

on montre que ces potentiels sont produits par les sources que sont la densité de charge et de courant suivant :

$$\Box\phi = \rho/\varepsilon_0 = \mu_0\ c^2\rho$$
$$\Box\mathbf{A} = \mu_0\ \mathbf{j}$$

que l'on peut réécrire sous forme plus compacte

$$\Box(\mathbf{A}, \phi/c) = \mu_0(\mathbf{j}, \rho c)$$

L'expression de droite étant proportionnelle (la constante μ_0 est scalaire) au quadrivecteur densité de charge et de courant, est quadrivectorielle. L'opérateur D'Alembertien étant un scalaire, l'équation ne peut être invariante de Lorentz que si $(\mathbf{A}, \phi/c)$ est un nouveau quadrivecteur noté A^μ. Alors la condition de Jauge et les équations des potentiels vérifiant cette condition invariante de Lorentz se résument à:

$$\nabla_\mu A^\mu = 0$$
$$\nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu = \mu_0 J^\mu$$

L'écriture sous forme tensorielle des équations de l'électromagnétisme s'engage bien ! Dans tous les ouvrages de troisième cycle on pose c=1 ce qui simplifie la mémorisation de toutes les formules. Le cas échéant, l'important est d'être en mesure d'effectuer l'analyse dimensionnelle permettant de réintroduire correctement les facteurs c.

4. Les potentiels d'une charge en mouvement

A. Mouvement à vitesse uniforme

Puisque A^μ est un quadrivecteur nous disposons désormais des transformations de Lorentz pour pouvoir exporter les potentiels d'un référentiel à un autre:

$$A_x = \gamma\left(A_x' + \frac{u}{c}\frac{\varphi'}{c}\right)$$
$$A_y = A_y'$$
$$A_z = A_z'$$
$$\frac{\varphi}{c} = \gamma\left(\frac{\varphi'}{c} + \frac{u}{c}A_x'\right)$$

Connaissant le potentiel électrostatique d'une charge q au repos dans R', $\varphi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\,;\,\vec{A}' = 0$, nous pouvons alors les utiliser pour obtenir celui de la charge en mouvement à la vitesse uniforme **u** dans R.

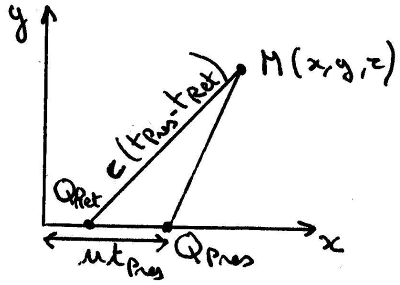
$$\varphi = \gamma\varphi' = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0 r'}$$
$$\vec{A} = \gamma\frac{\vec{u}}{c^2}\varphi' = \frac{\vec{u}}{c^2}\varphi$$

Pour achever la transformation il faut exprimer les champs dans R, ici ϕ, en fonction des coordonnées de R : x,y,z,t.

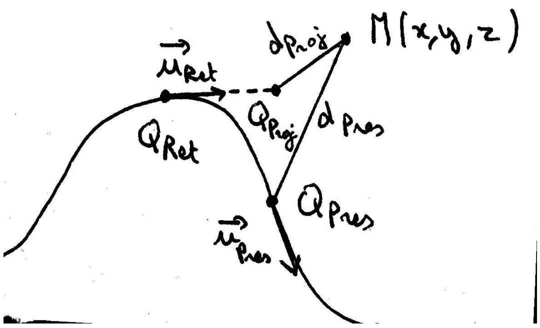
$$\varphi = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\gamma^2(x - ut)^2 + y^2 + z^2}}$$

comme nous l'avons directement obtenu en cours d'électromagnétisme.

B. Mouvement quelconque



L'expression $\varphi(x,y,z,t)=\frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2}}$ est celle du potentiel créé au point M(x,y,z) à l'instant t par une charge électrique en mouvement qui à cet instant $t=t_{Pres}$ se trouve à la position présente ($x_{Pres}=u.t_{Pres}$, $y_{Pres}=0$, $z_{Pres}=0$). Tout se passe donc comme si le potentiel était déterminé par la position présente de sa source alors qu'en réalité, on sait bien que les influences électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière donc l'influence qui détermine le potentiel n'a pu être émise qu'au temps « retardé » t_{Ret} où la source se trouvait à une distance $d_{Ret} = c(t_{Pres}-t_{Ret})$. De plus, nous savons que les potentiels ne sont déterminés que par la position et la vitesse de la charge source à t_{Ret} et pas par son accélération (contrairement au champ électromagnétique). Ceci signifie que même si la charge avait suivi un mouvement quelconque à partir de la même position retardée et même vitesse **u** à cette position au lieu de continuer en ligne droite à la vitesse **u**, le champ créé aurait été le même à l'instant $t=t_{Pres}$ i.e. ne semblant dépendre que d'une pseudo position présente ($x_{Pres}=u.t_{Pres}$, $y_{Pres}=0$, $z_{Pres}=0$) car dans ce cas elle aurait été complètement fictive, i.e n'ayant rien à voir avec la position réelle à laquelle le mouvement quelconque aurait amené la charge.



Nous réalisons alors qu'il est facile de calculer le potentiel d'une charge en mouvement tout à fait quelconque: il suffit pour cela (figure ci dessus) de remonter sur sa trajectoire à la position retardée (x_{Ret} , y_{Ret}, z_{Ret}) d'où l'influence électromagnétique fut émise puis partant de cette position retardée poursuivre à la vitesse $\mathbf{u}_{Ret}$ que la charge possédait en ce point jusqu'à l'instant présent qui définit une nouvelle position dite projetée (x_{Proj}, y_{Proj}, z_{Proj}). Dans le cas général c'est donc cette position qui doit remplacer la position présente dans la formule donnant le potentiel, donc

$$\varphi(x,y,z,t)=\frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(\gamma(u_{proj}))^2(x-x_{Proj})^2+(y-y_{Proj})^2+(z-z_{Proj})^2}}$$

$$\vec{A}=\frac{\vec{u}_{Proj}}{c^2}\varphi$$

avec

$$\vec{u}_{Proj}=\vec{u}_{Ret}$$

$$\vec{r}_{Proj}=\vec{r}_{Ret}+(t_{Pres}-t_{Ret})\vec{u}_{Ret}$$

5. Le tenseur du champ électromagnétique

Les relations $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t};\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ indiquent clairement que si **E** et **B** sont les composantes d'un nouveau tenseur, celui doit être construit à partir de nos quadrivecteurs $\nabla^\mu=(-\vec{\nabla},\frac{\partial}{c\partial t})$ et A^μ = (**A,** ϕ/c) Explicitons les composantes de **E** et **B** :

$$\frac{E_x}{c}=\frac{1}{c}(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t})=\nabla^1 A^0-\nabla^0 A^1=\nabla_0 A_1-\nabla_1 A_0$$

$$\frac{E_y}{c}=\frac{1}{c}(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial t})=\nabla^2 A^0-\nabla^0 A^2=\nabla_0 A_2-\nabla_2 A_0$$

$$\frac{E_z}{c}=\frac{1}{c}(-\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t})=\nabla^3 A^0-\nabla^0 A^3=\nabla_0 A_3-\nabla_3 A_0$$

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\nabla^3 A^2-\nabla^2 A^3=\nabla_3 A_2-\nabla_2 A_3$$

$$B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=\nabla^1 A^3-\nabla^3 A^1=\nabla_1 A_3-\nabla_3 A_1$$

$$B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=\nabla^2 A^1-\nabla^1 A^2=\nabla_2 A_1-\nabla_1 A_2$$

ce qui montre qu'elles sont elles-même les composantes d'un tenseur du second ordre $F_{\mu\nu}$ défini par:

$$F_{\mu\nu}=\nabla_\mu A_\nu-\nabla_\nu A_\mu=-F_{\nu\mu}$$

et manifestement anti-symétrique (s'inverse sous la permutation de ses indices). Tous ses termes diagonaux sont nuls $F_{\mu\mu}=0$ (Attention!: on n'applique la convention de sommation qu'entre une paire d'indices dont l'un est covariant et l'autre contravariant). On peut donc écrire $F_{\mu\nu}$ qui ne comporte que six éléments indépendants:

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \frac{-E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{-E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{-E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

6. Le champ électromagnétique d'une charge en mouvement

Puisque l'on a su déterminer le quadri-potentiel créé par une charge en mouvement quelconque, on peut en déduire le champ électromagnétique correspondant par $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t};\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$. Dans le cas d'un mouvement à vitesse uniforme **u** suivant la direction Ox on obtient:

$$E_x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{x-ut}{(\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$E_y=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{y}{(\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$E_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{z}{(\gamma^2(x-ut)^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

colinéaire au vecteur joignant la position présente Q_{Pres}(ut,0,0) de la charge au point M (x,y,z), et

$$\vec{B}=\frac{\vec{u}\times\vec{E}}{c^2}$$

A. Champ vers l'avant et l'arrière

Dans le cas particulier où M se trouve vers l'avant ou l'arrière de la charge en mouvement, y=z=0, donc $E_y = E_z = 0$ et:

$$E_x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\gamma^2(x-ut)^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\gamma^2 d^2}$$

avec d=||**Q_{Pres}M**||. Dans la direction du mouvement, le champ $E_{//}$ est donc diminué d'un facteur γ^2 par rapport à celui d'une charge au repos.

B. Champ dans une direction orthogonale au mouvement

Dans le cas particulier où M se trouve dans une direction orthogonale au mouvement de la charge, x=ut, donc E_x=0 et:

$$E=\sqrt{{E_y}^2+{E_z}^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma}{d^2}$$

et ce champ $E_\perp$ est donc augmenté d'un facteur γ par rapport à celui d'une charge au repos.

Afin de réellement mettre en évidence d'éventuels effets observables de la relativité restreinte, il faudra aller jusqu'au bout de la résolution d'un exemple particulier dans R puis, pour comparaison, dans R' car en déterminant les champs électriques et magnétiques nous n'avons fait pour le moment que des calculs intermédiaires. Il restera pour cela à établir la RFD relativiste en remplacement de la RFD classique et à vérifier que la force de Lorentz puisse s'écrire sous forme tensorielle pour s'assurer de sa validité.

7. La transformation du champ électromagnétique

Avoir compris que le champ électromagnétique est entièrement contenu dans un tenseur d'ordre 2 va nous permettre de calculer comment il se transforme de R à R' puisque nous connaissons les règles de transformation d'un tel tenseur: $F'_{\mu\nu}=(L^{-1})^\rho_\mu(L^{-1})^\sigma_\nu F_{\rho\sigma}$ Ainsi, sans compter les éléments diagonaux donc nuls de $F_{\mu\nu}$:

$$\frac{-E'_x}{c}=F'_{10}=(L^{-1})^\mu_1(L^{-1})^\nu_0 F_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow\frac{-E'_x}{c}=&(L^{-1})^0_1(L^{-1})^1_0F_{01}+(L^{-1})^0_1(L^{-1})^2_0F_{02}+(L^{-1})^0_1(L^{-1})^3_0F_{03}\\ &+(L^{-1})^1_1(L^{-1})^0_0F_{10}+(L^{-1})^1_1(L^{-1})^2_0F_{12}+(L^{-1})^1_1(L^{-1})^3_0F_{13}\\ &+(L^{-1})^2_1(L^{-1})^0_0F_{20}+(L^{-1})^2_1(L^{-1})^1_0F_{21}+(L^{-1})^2_1(L^{-1})^3_0F_{23}\\ &+(L^{-1})^3_1(L^{-1})^0_0F_{30}+(L^{-1})^3_1(L^{-1})^1_0F_{31}+(L^{-1})^3_1(L^{-1})^2_0F_{32}\end{aligned}$$

beaucoup de termes sont nuls car

$$(L^{-1})^{\nu}_{\mu}=\begin{bmatrix}\gamma & \beta\gamma & 0 & 0\\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

donc

$$\frac{-E'_x}{c}=(L^{-1})^0_1(L^{-1})^1_0F_{01}+(L^{-1})^1_1(L^{-1})^0_0F_{10}=((L^{-1})^1_1(L^{-1})^0_0-(L^{-1})^0_1(L^{-1})^1_0)F_{10}=\frac{-E_x}{c}(\gamma^2-\gamma^2u^2)$$

$$\rightarrow E'_x=E_x$$

On vérifiera que l'on obtient en suivant la même méthode:

$$E'_y=\gamma(E_y-uB_z)$$
$$E'_z=\gamma(E_z+uB_y)$$
$$B'_x=B_x$$
$$B'_y=\gamma(B_y+\frac{u}{c^2}E_z)$$
$$B'_z=\gamma(B_z-\frac{u}{c^2}E_y)$$

Soit en notation vectorielle:

$$\vec{E}'_x=\vec{E}_x$$
$$\vec{E}'_{y,z}=\gamma(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})_{y,z}$$
$$\vec{B}'_x=\vec{B}_x$$
$$\vec{B}'_{y,z}=\gamma(\vec{B}-\frac{\vec{u}}{c^2}\times\vec{E})_{y,z}$$

A. Application au champ électrique statique dans R

Par exemple, entre les armatures d'un condensateur, dans R, **E** = (0,E,0), **B** = (0,0,0) et par l'application des formules précédemment établies on obtient dans R'

E'= (0, γE,0), **B'** = (0,0,-γE u /c^2) = (0,0, - E' u /c^2) = -**u**/c^2 x **E'**

Sans surprise, un champ magnétique apparaît dans R'.

B. Application au champ magnétique statique dans R

Par exemple, dans le champ magnétique terrestre, dans R, **E** = (0,0,0), **B** = (0,B,0) et par l'application des formules précédemment établies on obtient dans R'

B' = (0,γB,0), **E'**= (0,0,γuB) =(0,0,uB') = **u** x **B'**

Sans surprise, un champ électrique apparaît dans R'.
Il est clair qu'une charge immobile dans R ne doit être soumise à aucune force si l'expression de la force de Lorentz est toujours valable et donc rester au repos. Qu'en est il dans R' où la charge se déplace avec la vitesse -**u** ? La charge doit être soumise à q(**E**'- **u** x **B**') = 0. Ouf!

8. L'électrodynamique sous forme covariante

A. Les équations de Maxwell

Nous avons achevé de collecter toutes les composantes des objets figurant dans les équations de la physique classique (sauf le champ gravitationnel) et de les ranger dans des tenseurs, nous pouvons maintenant envisager de réécrire toutes les équations, exceptée celle de la gravitation qui nécessitera un programme à part, sous forme covariante. C'était notre troisième étape annoncée qui en fait est déjà bien avancée puisque nous avons déjà obtenu les équations satisfaites par les potentiels créés par les sources

$$\nabla_\mu A^\mu = 0$$
$$\nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu = \mu_0 J^\mu$$

dont se déduit l'équation de conservation des sources en prenant le gradient ∇_μ de la deuxième équation :

$$\nabla_\mu J^\mu = 0$$

et l'équation liant le champ électromagnétique aux potentiels

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

En fait, avec ces équations, nous disposons déjà de l'électromagnétisme au complet (sans compter la force de Lorentz) puisque les lois liant le champ électromagnétique aux sources, autrement dit les équations de Maxwell, que nous allons maintenant réécrire sous forme covariante résultent de celles-ci. Introduisons la notation généralement utilisée en calcul tensoriel $\partial_\mu = \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ et calculons la somme de termes suivante dont les indices ont subi une permutation cyclique:

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = 0$$

En effet, grâce à la commutativité des dérivées partielles, les termes 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 se compensent pour un résultat total nul.

Remarquons que l'objet $\varepsilon_{\sigma\mu\nu} = \partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = -\varepsilon_{\sigma\nu\mu}$ est antisymétrique sous la permutation de μ et ν par exemple et comme tous les indices jouent des rôles équivalents dans cette expression, il est donc antisymétrique sous la permutation de n'importe quelle paire d'indice. Il est donc nul lorsque deux de ses indices sont égaux puisque égal à l'opposé de l'objet obtenu sous permutation de ces indices qui est dans ce cas lui même. Bref, ses seuls termes non trivialement nuls sont ceux dont les trois indices sont différents.
Pour σ=0, trois combinaisons indépendantes sont obtenues pour μ =1 et ν =2, μ =1 et ν =3, μ =2 et ν =3.
Calculons la première:

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = \frac{-\partial B_z}{\partial ct} + \frac{-\partial E_y}{c\,\partial x} + \frac{\partial E_x}{c\,\partial y}$$

qui comme toutes les autres doit s'annuler. L'équation obtenue n'est donc rien d'autre que la composante en z de l'équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$$

dont les composantes x et y découlent des équations correspondant aux deux autres paires d'indice (le vérifier).
Pour σ=1, il ne reste plus qu'une combinaison, la dernière, indépendante : μ =2 et ν =3.

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \frac{-\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

dont la nullité conduit naturellement à l'équation de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

Calculons la composante ν =0 du quadrivecteur $\partial_\mu F^{\mu\nu}$

$$\partial_\mu F^{\mu 0}=\partial_1 F^{10}+\partial_2 F^{20}+\partial_3 F^{30}=-\partial_1 F_{10}-\partial_2 F_{20}-\partial_3 F_{30}=\frac{1}{c}\vec{\nabla}.\vec{E}$$

pour ν =1:

$$\partial_\mu F^{\mu 1}=\partial_0 F^{01}+\partial_2 F^{21}+\partial_3 F^{31}=-\partial_0 F_{01}+\partial_2 F_{21}+\partial_3 F_{31}=\frac{-\partial E_x}{c^2\partial t}+\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

qui est la composante en x de

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

les composantes en y et z étant obtenues pour ν =2 et 3 (le vérifier). Par conséquent l'équation $\partial_\mu F^{\mu\nu}=\mu_0 J^\nu$ est l'écriture manifestement relativiste des deux équations de Maxwell avec sources:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

Récapitulons: les 4 équations de Maxwell peuvent être réécrites sous la forme covariante :

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\sigma}+\partial_\nu F_{\sigma\mu}=0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=\mu_0 J^\nu$$

B. La force de Lorentz

L'expression de la force de Lorentz **F** = q(**E**+**v** x **B**) est tri-vectorielle et ne peut donc pas telle quelle être réécrite sous forme covariante. Cependant, on peut remarquer que γ(v) **F** ne fait intervenir que des composantes des tenseurs bien connus $F^{\mu\nu}$ et v^μ =(γ(v)**v**,γ(v)c). En effet:

$$\gamma F_x=q\gamma(c\frac{E_x}{c}+v_y B_z-v_z B_y)=q(v_0 F_{01}+(-v_2)F_{21}-(-v_3)(-F_{31}))$$

$$\rightarrow\gamma F_x=q(-v_0 F_{10}+v_2 F_{12}+v_3 F_{13})=q(v_0 F^{10}+v_1 F^{11}+v_2 F^{12}+v_3 F^{13})=q v_\nu F^{1\nu}$$

On vérifie de même que les composantes en y et z de γ(v) **F** sont les composantes μ = 2 et 3 du quadrivecteur $f^\mu = q\, v_\nu F^{\mu\nu}$. La composante temporelle f^0 de f^μ est γ **F.v**/c **:**

$$q(v_0 F^{00}+v_1 F^{01}+v_2 F^{02}+v_3 F^{03})=q\gamma\frac{\vec{E}.\vec{v}}{c}=q\gamma(\vec{E}+\vec{v}\,x\,\vec{B}).\frac{\vec{v}}{c}=\gamma\frac{\vec{F}\,\vec{v}}{c}$$

mais l'important pour le moment est d'avoir pu caser la force de Lorentz dans le quadrivecteur $f^\mu = q\, v_\nu F^{\mu\nu}$.

C. La RFD covariante

Le quadrivecteur f^μ peut être le terme de force de notre RFD covariante mais dp^μ /dt ne convient pas car dt n'est pas un scalaire. dτ =dt/γ(v) est par contre un scalaire approprié ici en lieu et place de dt. La RFD covariante qui s'impose est donc:

$$\frac{d}{d\tau}p^{\mu}=f^{\mu}$$

puisque ses trois composantes spatiales donnent

$$\gamma(v)\frac{d\vec{p}}{dt}=\gamma(v)\vec{F}\rightarrow\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

donc une modification de la RFD classique qui dans le domaine des faibles vitesses (γ(v) ~ 1 ==> l'impulsion redevient classique: **p**=m**v**) tend vers la RFD classique. Sous l'effet de la force F la norme de l'impulsion γ(v) m v peut croitre à l'infini au fur et à mesure que v se rapproche de la vitesse limite c.

Mais la RFD relativiste introduit aussi la quatrième (μ = 0) équation:

$$\gamma(v)\frac{d}{dt}(\frac{E}{c})=\gamma(v)\vec{F}\frac{\vec{v}}{c}\rightarrow\frac{dE}{dt}=\vec{F}\vec{v}$$

qui exprime la conservation de l'énergie par unité de temps dt : durant dt, l'énergie de notre système ne peut être modifiée de dE que si les forces extérieures effectuent le travail dE = **F**.**dr** i.e apportent l'énergie dE à notre système. Dans le cas d'une collision entre particules d'un système isolé, **F**=**0** et nos quatre équations se résument à d**p**/dt=0, dE/dt=0: lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion d'un système isolé.

9. La force électromagnétique entre deux charges en mouvement

Considérons deux charges identiques initialement au repos dans R'. La force répulsive entre elles se réduit au terme Coulombien :

$$F'_y=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^2}$$

Dans R, les deux charges sont en mouvement à vitesse **u** et sensibles à la force de Lorentz incluant les effets du champ magnétique **B**=**u**x**E**/c^2

$$F_y=qE_y+q(\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{E})/c^2)_y=qE_y(1-\frac{u^2}{c^2})=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\gamma d^2}$$

où nous avons repris l'expression établie précédemment du champ électrique dans une direction orthogonale. La force totale entre les deux charges est donc atténuée par un facteur γ par rapport à celle calculée dans le référentiel R' de repos des charges. Qu'en est il des accélérations au passage de R' à R ? Comme nous l'avons établi au paragraphe précédent, en Relativité Restreinte c'est bien la force de Lorentz que nous venons de calculer qui doit figurer dans la partie tri-vectorielle de la RFD relativiste : $\frac{d(\gamma m\vec{u})}{dt}=\vec{F}$. A l'instant initial t=0, les charges sont immobiles dans R' et ont une vitesse **u** suivant la direction Ox dans R. Le terme comportant la dérivée temporelle de γ s'annule donc si on considère la projection suivant la direction Oy de la RFD et on obtient,
dans R':

$$\gamma(0)ma'_y=ma'_y=F'_y\rightarrow a'_y=\frac{F'_y}{m}$$

et de même dans R:

$$\gamma ma_y=F_y\rightarrow a_y=\frac{F_y}{m\gamma}=\frac{F'_y}{m\gamma^2}$$

donc

$$a_y=\frac{a'_y}{\gamma^2}$$

R et R' perçoivent les charges accélérer différemment conformément à la loi de transformation de l'accélération que nous avions établie: avec ces relations purement cinématiques tout était déjà fixé.

VIII. Conclusion

La théorie de la Relativité Restreinte est un des piliers de la physique contemporaine. Toutes les lois de la physique connues à ce jour, vérifiées par l'expérience, peuvent et doivent être formulées sous forme covariante ce qui assure qu'elles sont conformes aux principes de la Relativité Restreinte. Ses effets sont à prendre en compte en particulier dès lors que les vitesses mises en jeu dans les processus considérés ne sont plus négligeables par rapport à celle de la lumière, les lois de la physique classique demeurant une bonne approximation dans le cas contraire. Elle est naturellement à la base de la physique nucléaire, théâtre des transformations qui peuvent conduire l'énergie de masse à se transformer en d'autres formes d'énergie exploitables. Un autre pilier de la physique moderne est la théorie de la Mécanique Quantique qui a bouleversé au début du XX$^{\text{ième}}$ siècle notre compréhension des phénomènes à très petite échelle, celle des particules élémentaires et des atomes. Pour comprendre les phénomènes manifestant des vitesses proches de celle de la lumière et simultanément des processus à très petite échelle, l'unification de la Relativité Retreinte et de la Mécanique Quantique était indispensable. Bien avancée dans les années 60, la Théorie Quantique des Champs Relativistes qui en est l'aboutissement est le cadre théorique obligé pour comprendre les interactions entre particules via les forces Électromagnétiques, Nucléaires Faibles et Fortes aujourd'hui décrites par le Modèle Standard des particules élémentaires. Le troisième pilier est la Relativité Générale qui a révolutionné notre compréhension de la Gravité et intègre par construction les acquis de la Relativité Restreinte. Malgré des efforts importants, la Relativité Générale et la Mécanique Quantique résistent encore à l'unification.

Petite Introduction à
la Relativité Générale

La Relativité Restreinte nous a permis d'aboutir à des lois de la physique valables dans tous les référentiels inertiels (ou Galiléens). Les lois de l'électromagnétisme ont été réécrites sous forme covariante tandis que la RFD a été remplacée par une équation covariante. Il semblerait naturel d'essayer le même programme dans le cas de la gravité i.e. de tenter de réécrire les lois de Newton sous forme covariante ou de les transformer pour qu'elles le deviennent. Pourtant nous allons faire tout autre chose, de beaucoup plus ambitieux. Nous voulons en effet trouver des lois de la physique valables non plus seulement dans les référentiels inertiels mais dans n'importe quel système de coordonnées, y compris subissant des accélérations par rapport aux systèmes de coordonnées inertiels. Cette démarche, nous le verrons, nous conduira à une nouvelle théorie de la gravitation, la Relativité Générale. Mais il nous faut avant tout introduire un nouveau tenseur...

I. Le tenseur $g_{\mu\nu}$

Nous pouvons écrire la relation entre les composantes d'un quadrivecteur (on dira désormais un vecteur) et celles de son covecteur sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Q^0 \\ Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^0 \\ Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \end{bmatrix}$$

soit sous forme compacte $Q^\mu = \eta^{\mu\nu} Q_\nu$; $Q_\mu = \eta_{\mu\nu} Q^\nu$ en utilisant la convention de sommation sur les indice répétés. $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ = diag (1,-1,-1,-1) qui ne doit pas être considérée comme un tenseur en relativité restreinte mais simplement une matrice, matrice de Minkowski, la même dans n'importe quel référentiel inertiel.

On sait donc abaisser grâce à $\eta_{\mu\nu}$ l'indice du quadrivecteur Q^μ ou élever avec $\eta^{\mu\nu}$ celui du covecteur Q_ν mais aussi suivant le même principe monter et descendre n'importe quel indice d'un tenseur d'ordre quelconque. Désormais le scalaire $Q_\mu Q^\mu$ pourra s'écrire $\eta_{\mu\nu} Q^\nu Q^\mu$ et de façon générale tout tenseur ou équation tensorielle pourront être réécrits de façon à ne faire intervenir que $\eta_{\mu\nu}$ et des tenseurs contravariants. Par exemple:

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu$$

(on pose ici et dans la suite c=1. $d\tau$ ou ds sont utilisés indifféremment pour l'intervalle spatio-temporel, mais dans le cas d'un intervalle du genre temps on préfère $d\tau$ puisqu'il s'agit d'un temps propre. On réservera désormais la notation ξ^μ aux systèmes de coordonnées inertielles, x^μ sera utilisé pour les coordonnées générales).
$d\tau^2$ peut être exprimé dans un système de coordonnées quelconque:

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\rho dx^\sigma = g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma$$

où nous avons défini

$$g_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma}$$

Généralisons les vecteurs covariants ou contravariants au cas d'une transformation de coordonnées quelconque, on dit générale, de x^μ à x'^μ . Un vecteur contravariant se transformera comme x^μ selon $V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu$, un vecteur covariant suivant la transformation inverse $V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu$ et un tenseur d'ordre quelconque tel que $T^\mu{}_\nu{}^\lambda$ suivant: $T'^\mu{}_\nu{}^\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T^\kappa{}_\rho{}^\sigma$. Il est facile de vérifier que $g_{\mu\nu}$ est (puisque se transforme comme) un tenseur d'ordre 2 covariant sous transformation générale de coordonnées contrairement à $\eta_{\mu\nu}$ qui n'est que la matrice diag (1,-1,-1,-1). $g_{\mu\nu}$ ne prend la forme Minkowskienne, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ que dans un référentiel inertiel.

$d\tau^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ est donc par construction invariant (un scalaire) sous n'importe quelle transformation de coordonnées. Notons qu'introduire le véritable tenseur $g_{\mu\nu}$ en lieu et place de $\eta_{\mu\nu}$ de cette façon escamote complètement la Relativité Restreinte puisque désormais ce sont les transformations quelconques de $g_{\mu\nu}$, dx^μ et dx^ν qui se compensent de telle sorte que $d\tau^2$ reste invariant alors que dans le système de coordonnées inertiel nous pouvions écrire $d\tau^2=\eta_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu$ avec $\eta_{\mu\nu}$ une matrice fixée, et l'exigence d'invariance de $d\tau^2$ était une forte contrainte sur la manière dont devait se transformer $d\xi^\mu$: seules les transformations de Lorentz pouvaient la satisfaire.

Dans le but de rendre les équations de la physique généralement covariantes, nous serons amenés à introduire partout $g_{\mu\nu}$ en lieu et place de $\eta_{\mu\nu}$ ce qui masquera complètement la covariance de Lorentz des équations. Ce n'est que dans les référentiels inertiels que nous pourrons maintenir $\eta_{\mu\nu}$ et retrouver la relativité restreinte. Dans les autres référentiels $g_{\mu\nu}$ jouera un rôle majeur puisqu'il intégrera aussi bien les pseudo-forces qui apparaissent lorsque on se place dans un référentiel non inertiel, que la gravitation.

II. Les lois de la physique dans R quelconque

Nous avons vu qu'en essayant d'obtenir des équations valables pour tous les observateurs inertiels, nous y étions parvenus sans que celles-ci ne manifestent d'effets de référentiel privilégié. Autrement dit, aucune de ces équations n'intégrait au final la vitesse **u** du référentiel où nous les écrivions par rapport à un certain référentiel privilégié: une symétrie était respectée qui assurait qu'aucune expérience ne pourrait être sensible à **u**. Au contraire, en essayant d'obtenir des équations valides après une reparamétrisation quelconque, on dit dans un système de coordonnées général, nous serons amenés à inclure explicitement les effets des accélérations permettant de passer des référentiels inertiels à des référentiels généraux: aucune nouvelle symétrie de la physique ne se manifestera au sens où nous avons défini les symétries jusqu'ici i.e par exemple le principe de relativité. En effet, nous savons par expérience que des nouvelles forces, ou plutôt des pseudo-forces, se manifestent du simple fait de se placer dans des référentiels accélérés. Dès le départ, nous devons donc être conscients que la Relativité Générale suit une ligne de pensée radicalement différente de celle de la Relativité Restreinte.

Prenons pour exemple la RFD en absence de forces dans un système de coordonnées (référentiel) inertiel ξ^μ

$$d^2\xi^\mu/d\tau^2=0 \text{ (l'accélération est nulle)}$$

On peut transformer cette RFD pour l'exprimer dans un système de coordonnées x^μ général. Le calcul donne :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}=-\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}$$

Le terme de droite représente toutes les nouvelles forces (Entraînement, Coriolis etc...) que le passage dans le système x^μ pourrait faire apparaître et l'accélération (terme de gauche) n'est donc plus nulle en général. On montre que $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ appelée connexion affine ne dépend que de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées. Nous reconnaissons donc l'importance de ce nouveau champ $g_{\mu\nu}$ appelé champ métrique qui porte en lui tous les effets produits par le passage dans un système de coordonnées général (accélérations centrifuges, etc...).

L'équation obtenue est dite généralement covariante car sa forme est valide non plus seulement dans les système de coordonnées inertiels mais dans un système de coordonnées quelconque. On montre que toutes les équations de la physique covariantes de Lorentz peuvent être rendues généralement covariantes en y remplaçant $\eta_{\mu\nu}$ par $g_{\mu\nu}$ et les dérivées par des dérivées dites covariantes construites à partir de $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ donc de $g_{\mu\nu}$ et ses dérivées. Ainsi $g_{\mu\nu}$ et ses effets peuvent ils être introduits dans toutes les équations de la physique qui dès lors seront valides dans tous les référentiels.

III. Le principe d'équivalence d'Einstein et la gravitation

Les pseudo-forces sont des forces comme les forces centrifuges qui ne surgissent que du fait d'un choix de système de coordonnées. Cela signifie qu'on peut toujours revenir au référentiel dit inertiel dans lequel celles-ci s'annulent **partout**. La bonne surprise est que dans les nouvelles lois généralement covariantes, les termes intégrant les pseudo-forces peuvent aussi décrire la gravitation qui, elle, est une véritable force : il n'existe aucun changement de référentiel permettant d'en annuler les effets **partout simultanément.** Comment cela est il possible? C'est Einstein qui en eu l'idée géniale et l'énonça dans son fameux Principe d'Équivalence selon lequel il existe toujours un changement de référentiel permettant d'annuler **tous** les effets de la gravitation en **un point spatiotemporel** donné arbitrairement choisi. Cette possibilité d'annihiler totalement les effets de la gravité par le simple choix d'un système de coordonnées est le point commun essentiel entre la gravité et les pseudo-forces inertielles et qui permet de les traiter dans le même formalisme. La différence majeure à garder à l'esprit est que dans le cas de la gravité cette capacité n'est que locale et pas globale! En considérant un voisinage de notre point spatio-temporel suffisamment petit pour que l'on puisse y négliger les variations de la gravité, c'est donc dans tout ce voisinage que l'on supprime les effets de la gravitation par le choix du référentiel que l'on dit localement inertiel.

Donc si le principe d'équivalence est vrai il n'y a rien d'autre à faire que de prendre les équations généralement covariantes obtenues précédemment. Elles intègrent avec $g_{\mu\nu}$ non seulement les peudo-forces mais aussi la gravité: $g_{\mu\nu}$ est aussi le champ gravitationnel et par exemple l'équation

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}$$

en remplacement de l'équation classique $m\vec{a} = m\vec{g}$ qui nous dit comment désormais une masse m est accélérée par la gravité, est appelée équation de la chute libre.

Pour mieux comprendre pourquoi tous les effets de la gravité peuvent être localement annihilés par un changement de référentiel, considérons deux charges électriques, l'une positive et l'autre négative, à peu près au même endroit de telle sorte qu'elles sont plongées dans le même champ électrique extérieur. Les deux subiront donc des accélérations opposées. En accélérant de la même façon que la première charge, l'observateur que je suis ne voit plus cette charge accélérée: un simple changement de référentiel me permet donc d'annihiler l'effet de la force électrique sur cette charge mais...pas simultanément sur l'autre qui accélère différemment dans le même champ. Ce qui ne marche pas pour la force électrique semble par contre fonctionner parfaitement pour la gravité qui accélère tous les corps de la même façon en un lieu précis, indépendamment de leur masse ou de leur constitution physique. Cela avait été remarqué depuis longtemps dans la loi classique d'accélération sous l'effet de la gravité $\vec{a} = \vec{g}$ qui est la même pour tous les corps contrairement à $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ pour la force électrique qui différencie les corps suivant le rapport q/m qu'ils présentent. Ainsi donc, si l'observateur que je suis est accéléré de la même façon que tous les corps dans le champ de gravité, **tous** les effets de la gravité lui paraîtront annihilés. C'est pourquoi dans une cabine en chute libre tous les objets semblent en parfaite apesanteur: ils ne s'éloignent ni ne se rapprochent les uns des autres. Si la cabine est suffisamment grande il deviendra perceptible qu'à l'intérieur les objets en réalité s'éloignent d'autant plus les uns des autres que leur différence d'altitude est importante. En effet, comme le champ gravitationnel n'est pas le même partout dans la cabine on ne peut simultanément annihiler ces effets partout dans la cabine par le choix du référentiel lié à la cabine: l'annihilation des effets de la gravité ne peut donc être que locale et non globale contrairement à celle d'une force centrifuge. Des effets dits de marée, liés aux variations du champ gravitationnels subsistent.

Si tous les corps tombent de la même façon c'est en fait qu'ils semblent suivre des rails invisibles qui ne font aucune différence entre eux. Même la lumière subit la loi d'attraction gravitationnelle, celle à laquelle est soumis tout corps se déplaçant à la vitesse c. La masse grave et la masse inerte se simplifiaient de la loi classique $m\vec{a} = m\vec{g}$ alors qu'elles n'ont tout simplement plus leur place dans la nouvelle équation de la chute libre.

IV. L'équation d'Einstein

Nous n'avons pas achevé la nouvelle théorie de la gravitation qui découle de la covariantisation générale et du Principe d'Équivalence. Nous ne nous sommes en effet intéressés qu'à la façon dont les corps subissent la gravité et pas à la manière dont ils la produisent. La nouvelle équation satisfaite par $g_{\mu\nu}$ en remplacement de la loi de Newton doit encore être dérivée. Il existe beaucoup d'équations généralement covariantes possibles de $g_{\mu\nu}$ qui nous redonneraient la loi de Newton en bonne approximation mais une seule avec des dérivées d'ordre 2 au maximum (si on exclu à priori un terme sans dérivées simplement proportionnel à $g_{\mu\nu}$ appelé terme de constante cosmologique) que l'on puisse dériver d'un principe d'extrême action. C'est l'équation d'Einstein (avec c=1):

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

à comparer par exemple aux équations de Maxwell sous forme covariante. A droite, la source du champ gravitationnel qui n'est plus un quadrivecteur mais un tenseur d'ordre 2, $T_{\mu\nu}$ appelé tenseur énergie-impulsion, dans lequel figurent l'énergie sous toutes ses formes, l'impulsion, la pression, toutes capables de générer de la gravité. A gauche $G_{\mu\nu}$ est un tenseur construit uniquement à partir de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées premières et secondes. Énumérons les similitudes et différences importantes entre cette loi et celle de Newton :

- Le système d'équations différentielles est impossible à résoudre exactement sauf dans des cas particuliers où la source manifeste des symétries permettant de les simplifier et résoudre: masse sphérique, univers entier homogène et isotrope. Il faudra donc procéder par approximations dans le cas général.

- La théorie est très non linéaire: le champ gravitationnel créé par deux masses n'est plus la superposition additive des champs créés par chacune.

- La lumière, puisqu'elle transporte de l'énergie (pression de radiation), peut générer de la gravité contrairement à la gravité Newtonienne que seule la masse pouvait produire. Cela n'a pas encore été mis en évidence par les observations astrophysiques même si ce résultat est très utilisé en cosmologie primordiale.

- La gravité demeure exclusivement attractive dans le cas statique à symétrie sphérique.

- Les équations admettent des solutions se propageant à la vitesse de la lumière: des ondes gravitationnelles quadrupolaires rayonnées par toute masse accélérée. La mise en évidence indirecte de la perte d'énergie par rayonnement d'ondes gravitationnelles du pulsar dans un système binaire a été possible mais la détection directe des ondes reste à faire. D'immenses interféromètres les traquent.

- L'interaction gravitationnelle n'est plus instantanée à distance comme celle de Newton mais propagée à la vitesse c. Cela n'a pas encore été mis en évidence par l'observation.

- La théorie est relativiste au sens où elle intègre les acquis de la Relativité Restreinte de façon analogue à l'électromagnétisme. Par exemple, de même qu'une charge en mouvement crée un champ magnétique, une masse en mouvement doit donner à $g_{\mu\nu}$ une composante gravitomagnétique. Il n'en existe aucun équivalent dans le cadre Newtonien. Certains effets gravito-magnétiques comme le frame-dragging, difficiles à mettre en évidence restent encore à confirmer notamment par l'expérience Gravity-Probe B.

- La théorie prédit l'existence de singularités de l'espace-temps au voisinage d'une masse source concentrée dans un volume suffisamment petit. On parle alors de trous noirs. Il n'existe aucune preuve à ce jour de l'existence de la singularité mais beaucoup de candidats trous noirs de quelques masses solaires à des millions de masses solaires.

V. Les effets de $g_{\mu\nu}$

La phénoménologie est très riche car les effets du champ gravitationnel sont de plusieurs types contrairement à ceux de la gravité Newtonienne.

L'examen en deux dimensions (pour simplifier) de $d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{00}\, dt^2 - g_{11}\, dx^2$ (le terme en g_{01} qui porte les effets gravitomagnétiques liés au mouvement de la masse source est supposé nul: source au repos) permet de se faire une idée intuitive des effets de $g_{\mu\nu}$. Un corps au repos (dx=0) plongé dans $g_{\mu\nu}$ n'est soumis qu'à g_{00} qui dilate le temps: $dt=d\tau/(g_{00})^{1/2}$ et ceci est à l'origine de l'essentiel de la force gravitationnelle. Dans le cas d'une faible gravité exercée par un corps pouvant être assimilé à une masse ponctuelle m, un développement limité en $Gm/rc^2 \ll 1$ (c'est toujours le cas dans le système solaire), conduit à $g_{00}=-1+2\frac{Gm}{r}-2\left(\frac{Gm}{r}\right)^2+\ldots$ dont le premier ordre correspond au potentiel Newtonien et le deuxième est une très petite correction dite Post-Newtonienne de l'ordre de 10^{-6} au maximum dans le système solaire (à proximité de la surface solaire).

$g_{11}=1+2\frac{Gm}{r}+\ldots$ contracte l'espace: pour dt=0, dx varie comme $d\tau/(g_{11})^{1/2}$ et ceci va produire une contribution Post-Newtonienne supplémentaire à la force gravitationnelle mais qui n'aura d'effet que sur les corps en mouvement i.e. pour lesquels $dx \neq 0$. Son effet est d'autant plus important que la vitesse du corps plongé dans la gravité est grande. Les effets sont maximaux sur la lumière dont la trajectoire va être affectée par g_{00} et g_{11} à parts égales. Les termes très faibles au delà de l'ordre Post-Newtonien, i.e. du troisième ordre sur g_{00} et second ordre sur g_{11} n'ont pour le moment jamais été mis en évidence.

Nous avons dit sans le justifier que les déformations de l'espace et du temps engendrées par $g_{\mu\nu}$ sont responsables de la force gravitationnelle et de la trajectoire suivie. C'est en effet ce que l'analyse de notre équation de la chute libre tendrait à mettre en évidence. Car celle-ci peut être déduite d'un principe de minimisation du temps propre: tout corps adopte la trajectoire qui minimise son temps propre de parcours entre deux points, et pour cela incurve sa trajectoire de façon à profiter des zones où sous l'effet de $g_{\mu\nu}$ l'espace est plus ou moins contracté et le temps s'écoule plus ou moins vite. Il semble donc que $g_{\mu\nu}$ puisse être considérée comme la métrique de l'espace-temps qui dès lors serait à considérer comme un continuum ayant une géométrie déformable, pouvant être courbée par la présence des sources. Les corps n'ont finalement plus d'autre choix que de se déplacer en ligne droite dans cette géométrie courbe, les trajectoires pas d'autre option que de s'incurver pour suivre tels des rails invisibles les chemins les plus rapides donc en ligne droite de cette géométrie.
Précisons également qu'en Relativité Générale, l'espace-temps n'est plus le cadre passif dans lequel les phénomènes sont décrits et se déroulent. Au contraire, il est dynamique et peut véhiculer de l'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles. Ainsi les corps peuvent échanger de l'énergie avec l'espace temps qui devient un acteur à part entière.

L'absence d'un cadre spatio-temporel fixe et non dynamique en Relativité Générale est le principal obstacle à l'unification de cette théorie avec celle de la Mécanique Quantique dont toutes les méthodes de calcul présupposent un tel background de référence.

VI. Les triomphes de la Relativité Générale

La théorie a été testée avec un succès éclatant dans un grand nombre de ses prédictions.

1. L'avance du périhélie de Mercure

L'avance anormale de 43.2 "/siècle du périhélie de mercure était une anomalie connue depuis longtemps. Elle est la conséquence des corrections Post-Newtoniennes apportées par g_{00} et g_{11} à l'accélération gravitationnelle. Le calcul en effet permit à Einstein de retrouver l'avance observée avec une très bonne précision. Les prédictions de la Relativité Générale sont aujourd'hui testées à 0.002 % près dans le système solaire.

2. La déflexion de la lumière au ras du disque solaire (1919)

Selon la Relativité Générale une masse telle que le soleil doit dévier les rayons lumineux qui la frôlent. Cette déviation est la conséquence à parts égales du terme Newtonien de g_{00} et de la correction Post-Newtonienne apportée par g_{11} . La déflexion est de 1.7" au ras du disque solaire et n'a pu être observée pour la première fois qu'à la faveur d'une éclipse de soleil en 1919. L'éclipse était nécessaire afin de pouvoir mettre en évidence le déplacement de la position apparente d'une étoile lointaine au ras du disque solaire sans être aveuglé par le soleil.

3. Le red-shift gravitationnel (1960)

Toute horloge est ralentie dans un champ gravitationnel d'autant plus que celui-ci est intense. C'est l'effet de g_{00}. Il fut vérifié pour la première fois en comparant les fréquences de mêmes transitions atomiques au sommet et au pied de la tour de Harvard: $T_{base}/T_{sommet} = (g_{00}\,(\text{sommet}) / g_{00}\,(\text{base}))^{1/2}$. Le retard de l'horloge à la base de la tour d'un dixième de seconde par million d'années fut mesuré à 10% près. Le redshift gravitationnel est aujourd'hui mesuré à 0.02% près.

4. Le délai de propagation de Shapiro (1970)

Les effets combinés de g_{00} à l'ordre Newtonien et g_{11} contribuent à provoquer un retard dans le temps de propagation aller retour d'un signal lumineux entre la terre et la surface réfléchissante de Mercure, lorsque la trajectoire de ce signal passe à proximité du soleil. L'effet fut confirmé avec une précision de 10% au début des années 70.

VII. Conclusion

La Relativité Générale est une théorie d'une remarquable beauté conceptuelle et qui jusqu'à aujourd'hui a passé avec succès une grande variété de tests portant sur les différentes versions de son Principe d'Équivalence. Mais elle définit aussi le cadre théorique nécessaire pour aborder la cosmologie i.e reconstituer les grandes étapes de l'évolution de notre univers. La cosmologie nous donne accès à des tests de la Relativité Générale dans un secteur auquel les observations dans le système solaire ne sont pas sensibles. Comme la Relativité Générale seule échoue à rendre compte des grands observables cosmologiques on assiste depuis plusieurs décennies à la multiplication d'hypothèses rajoutées (matière noire, énergie noire) qui comme autant d'épicycles semblent permettre en jouant sur un certain nombre de paramètres libres de s'accommoder de toutes les observations ou presque. Cette situation ajoutée à certains défauts évidents de la théorie, comme son incompatibilité notoire avec la Mécanique Quantique et sa faible calculabilité sont pour certains des signes annonciateurs d'une évolution ou révolution théorique nécessaire. Par ailleurs, dans le système solaire, une anomalie notable, un décalage vers le bleu inexpliqué du signal radio des sondes Pioneer au delà de l'orbite de Saturne dans les années 70 n'a toujours pas reçu d'explication satisfaisante. Il importe donc de rester plus que jamais attentifs aux résultats des nouveaux tests expérimentaux d'autant plus que certaines prédictions importantes de la Relativité Générale n'ont pas encore pu être testées, comme la polarisation de ses ondes gravitationnelles, certains effets gravitomagnétiques ou l'horizon des trous noirs. Les résultats d'expériences conçues pour atteindre la précision des ordres Post-Post-Newtonien dans le système solaire seront ainsi très attendus de même que les nouveaux tests en forts champs gravitationnels au voisinage de candidats trous noirs ou étoiles compactes, déjà un domaine de tests complémentaires très actif et fructueux. Des surprises importantes ne sont pas à exclure dans un futur proche.